Universe Scientific Publishing

Education research 教育研究
第 1 卷◆第 4 期◆版本 1.0◆2018 年 12 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

浅谈中学数学构造法的应用

黎石燕
梧州市藤县一中
DOI:10.32629/er.v1i4.1548

[摘　要] 构造法对于中学数学具有重要的意义。在求解中学数学题目的过程中使用构造法,能够使题目由难转易。在遇到较难题目,常规方法已经无法下手时,就要求我们从其他方面考虑,而构造法就是我们的一种常用解题思路,这就要求我们能够很好的掌握如何应用构造法,以及在什么情况下应用构造法。本文通过列举应用构造法解决中学数学题目的实例,如构造一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数和幂函数；通过这些例题,让我们了解构造法所具有的魅力,它们也体现了构造法的灵活性与技巧性。这有利于以后我们解决此类相关数学问题。总而言之,应用构造法解决中学数学问题,重点在于我们能够理解与掌握数学有关性质与定理,能够根据题目条件,灵活地构造出相关式子,使得题目简单化,从而达到解题的目的。

[关键词] 构造法；函数；复数；数列

构造法在中学数学中的应用,许多数学家如德国的克隆尼克、马尔科夫、比肖泊等都做过研究。构造法是中学数学的一种很重要的解题方法,在面对难题目时,一般的常规方法已经无法解决时,这时就要求我们从其他方面考虑了,而构造法就是我们的一种解题思路了。而面对题目我们应该如何应用构造法？应用构造法的步骤是：首先先看题目的问题,看需要我们解决的问题是什么；然后根据问题联系数学的相关知识,根据条件构造出我们所需要的数学模型；最后由我们构造的数学模型结合相关数学知识,找到解题思路,最终解决题目。下面我从几个方面分析一下构造法对中学数学解题的重要性。

1 构造函数

1.1 构造一次函数

函数具有单调性,在解题中我们可以构造函数,然后通过函数的相关性质来解决题目,因此,这就要求我们如何构造函数了。下面我们通过举实例来解释应用构造函数。

例 1.1.1

设不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\le 2$ 的一切实数 m 的值都成立,求的 x 取值范围。

解 ：原不等式可化为：$m(x^2-1)-(2x-1)<0$，

记 ：$f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，

根据已知,要使原不等式成立,则有 $\begin{cases} f(-2)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$，

即：$\begin{cases} -2x^2-2x+3<0 \\ 2x^2+2x-1<0 \end{cases}$，解得 $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

我们知道一次函数的一般式为 $y=ax+b$，通过分析题目我们可以把不等式中的 m 看作未知数,从而构造出一次函数 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，即把 x^2-1 和 $2x-1$ 看作已知，m 为未知数,把问题转化为关于一次函数的取值范围问题,然后根据已知条件应用一次函数的单调性,这样问题就可以很快得到解决。

1.2 构造二次函数

构造二次函数,把问题转化为二次函数问题,利用二次函数的部分单调性,由函数的单调性作为解题突破口,从而达到解决问题的目的。

例 1.2.1

若不等式 $x^2+ax+1<0$ 对一切 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 成立,则 a 的最小值是多少？

解：设 $f(x)=x^2+ax+1$，则二次函数 $f(x)$ 的图像的对称轴是 $x=-\frac{a}{2}$。

(1) 若 $(-\frac{a}{2}?\frac{1}{2})$，即 $a<1$，则 $f(x)$ 在是减函数则 $-\frac{5}{2}<a<-1$。

(2) 若 $-\dfrac{a}{2}<0$，即 $a^3<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 是增函数,有 $f(0)=1>0$ 恒成立,则 $a^3>0$。

(3) 若 $0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{2}$，即 $-1<a<0$，

则有：$f(-\dfrac{a}{2})=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}+1=1-\dfrac{a^2}{4}?0$ 恒成立，则 $-1<a<0$；所以综上 $a<\dfrac{5}{2}$。

本题将不等式恒成立问题转化为二次函数问题来解决,通过构造二次函数 $f(x)=x^2+ax+1$，然后利用二次函数的单调性解题。另一种情况,根据等式中各式子的相似结构,构造二次函数,再通过单调性解决题目,例如：

令 $z=\frac{x}{q}$，$\sqrt{x2-r2}=xq$，

则：$y^2=z^2-x^2=\frac{x^2}{q^2}-x^2=x^2?\frac{1-q^2}{q^2}$，

又因为：$r^2=x^2(1-q^2)$，所以：$\frac{y^2}{r^2}=\frac{1}{q^2}=\frac{z^2}{x^2}$，

即有：$xy=rz$。

所以题目得证，本题通过构造等比数列，然后应用等比数列的相关性质，可以很快解决题目。当然，构造数列不仅可以应用在关于恒等式问题上，也可以应用在不等式的证明问题上，下面通过举例说明。这道题目的证明是不等式的证明，一般的思路是应用数学归纳法，但证明过程较繁，本题通过构造数列，利用数列的单调性来解题，可以使解题过程简洁明快。

3 构造复数

有些问题在实数范围内难以解决，这时我们通过构造复数，可以达到意想不到的效果。下面通过举实例构造复数来解决问题。

例 3.1.1

已知 M 为曲线 $C:y=x^2-2x+3$ 上的任意一点，连接 OM，作矩形 $OMNP$，若 $|OP|=2|OM|$，求动点 P 的轨迹方程。

解：设 OM M，P 对应的复数分别是：x_0+y_0i，$z+yi$，

所以根据向量 $\overline{OM}$ 和 $\overline{OP}$ 的关系得到：

$z+yi=2(x_0+y_0i)(-i)$ 或 $z+yi=2(x_0-y_0i)?i$

即有：$z+yi=2y_0-2x_0i$ 或 $z+yi=-2y_0+2x_0i$

因为复数相等的条件是对应的实部与虚部分别相等，所以有：

$\begin{cases}z=2y_0\\z=-2x_0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}z=-2y_0\\z=2x_0\end{cases}$，即得到：$\begin{cases}y_0=\frac{1}{2}z\\x_0=-\frac{1}{2}y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_0=-\frac{1}{2}z\\x_0=\frac{1}{2}y\end{cases}$

将 x_0,y_0 对入曲线 C 的方程，经过整理可以得到动点 P 的轨迹方程位：

$(y+2)^2=2(z-4)$ 或 $(y-2)^2=-2(z+4)$

首先分析题目，我们知道在矩形 $OMNP$ 中，$OP\char`^OM$，而且又已知 $|OP|=2|OM|$，所以我们可以通过构造复数，转化成复数的运算，这样可以更容易解决题目了。

4 结语

构造法作为数学中的一种思想方法，在中学数学的应用上具有非常重要的作用。应用构造法去解决题目，这就要求我们必须熟悉与掌握中学数学的相关定理与性质，以及有关分类，然后联系题目的条件，通过构造出题目没有给出的函数、图形等等，使问题由难变易，从而更快地找出思路，解决问题。

总之，应用构造法是为了把问题由复杂变简单，用一种更灵活地方法来解决问题，有利于提高思维，对于我们解决问题具有很重要的意义。

[参考文献]

[1]王芹.构造复数巧解题[J].新高考(高二版),2008,04:32.

[2]曹大方.构造三角形解题例说[J].数学大世界(高中生数学辅导版),2003,(06):12-13.

[3]周素英.构造复数巧解题[J].中学生数理化(高二版),2012,(03):15.

[4]宋波.例析构造数列解题[J].高中数学教与学,2012,(13):23-25.