第 3 卷◆第 2 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

具有染病年龄结构的伪狂犬病模型的分析

刘文娟　乔亚琴　唐凤玲
西安交通工程学院 公共课部
DOI:10.32629/er.v3i2.2473

[摘　要] 根据不同年龄猪群对伪狂犬病的感染程度不一样,建立了具有染病年龄结构的传染病模型,并分析了其动力学行为,寻求决定疾病绝灭与否的基本再生数。当基本再生数小于或等于1时,模型仅有唯一的无病平衡点,当基本再生数大于1时,模型还存在唯一的正平衡点,利用线性化方法、波动引理和Liapunov函数方法,讨论了两个平衡点的全局渐近稳定性。
[关键词] 伪狂犬病；基本再生数；全局稳定性；Liapunov函数；波动引理；无病平衡点；正平衡点；年龄结构

引言

人或其他的生物体由于受到原虫、蠕虫等寄生虫或病菌、细菌等病原体感染,产生的可以在相关种群间流行的疾病[1],叫做传染病(Infectious Diseases)。传染病一直威胁着人类的健康,历史上,一次次爆发的传染病都给人类带来了很大的灾难[2-4]。

伪狂犬病(PR),是由伪狂犬病病毒(PRV)引起的多种动物共患病,是猪的重要繁殖障碍性传染病之一。一般情况下,患病猪的症状反应和患病时间长短之间有着密切的关系。以仔猪患病后的症状反应最为明显,首先表现为较为明显的体温上升、拉稀、震颤、流口水、运动失调等,且具有病程时间短、死亡率高等特征。而成年猪患伪狂犬病后,仅表现出体温升高、腹泻或呼吸困难等,严重情况下会出现暂时性失明,并且公猪和母猪不孕、食欲下降等表现为主病猪、带毒猪和带毒的鼠类为PR的重要传染源,特别是无症状的带病毒猪在病毒的保存和传播中起着决定性作用 。目前该病尚无特效药物,只有采取疫苗预防、及时隔离、淘汰病猪、净化猪群等措施。

1 模型建立

本文把猪的种群分为易感猪群、染病猪群、潜伏期猪群三类,$S(t)$,$L(t)$ 分别表示 t 时刻易感猪群和潜伏期猪群的数量总体。$i(t,a)$ 表示 t 时刻染病年龄为 a 的猪群年龄密度函数。$I(a)=\int_0^\infty i(t,a)da$ 表示 t 时刻染病猪群的数量总体。设 Λ 为猪的出生率,d 表示猪的自然死亡率,η 为成年猪群在潜伏期内的再次发病率,a 为染病年龄,传染率系数和成年猪群从染病期到潜伏期的转化系数都与染病年龄 a 有关,分别记为 $\beta(a)$ 和 $\gamma(a)$ 。

基于以上假设,建立如下模型:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt}=\Lambda-S(t)\int_0^\infty \beta(a)i(t,a)da-dS(t), \\ \dfrac{\partial i(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(a,t)}{\partial a}=-(d+\gamma(a))i(t,a), \\ i(t,0)=S(t)\int_0^\infty \beta(a)i(t,a)da+\eta L(t), \\ \dfrac{dL(t)}{dt}=\int_0^\infty \gamma(a)i(t,a)da-(d+\eta)L(t), \\ S(t)\ge 0, i(0,\cdot)=i_0(\cdot)\in L_+^1, L(0)=\mathrm{L}_0\ge 0. \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 L^1_+ 是从 $(0,\infty)$ 到 $\mathrm{R}_+=[0,+\infty)$ 上的可积函数的集合。设 $N(t)=\left\|\mathrm{S}(t), i(t,\cdot), L(t)\right\|$,则 $\dfrac{dN(t)}{dt}\le\Lambda-dN(t)$ 。

为了计算方便,当 $a\in\mathrm{R}_+=[0,+\infty)$ 时,设:

$$\pi(a)=e^{-\int_0^a(d+\gamma(s))ds},\ K=\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)da,$$

$$P=\int_0^\infty\gamma(a)\pi(a)da.$$

定义基本再生数 $\Re_0=\dfrac{\Lambda K}{d}+\dfrac{\eta P}{d+\eta}$ 。

2 平衡点存在性

假设 $E=(\overline{S},\overline{i},\overline{L})$ 是(1-1)的平衡点,则有:

$$\begin{cases} 0=\Lambda-\overline{S}\int_0^\infty\beta(a)\overline{i}(a)da-d\overline{S}, \\ \dfrac{d\overline{i}(a)}{dt}=-(d+\gamma(a))\overline{i}(a), \\ \overline{i}(0)=\overline{S}\int_0^\infty\beta(a)\overline{i}(a)da+\eta\overline{L}, \\ 0=\int_0^\infty\gamma(a)\overline{i}(a)da-(d+\eta)\overline{L}. \end{cases} \tag{1-2}$$

那么,由(1-2)的第二个方程得到 $\overline{i}(a)=\overline{i}(0)\pi(a)$,将其代入(1-2)的第四个方程,得:$\overline{L}=\dfrac{P}{d+\eta}\overline{i}(0)$,由(1-2)的第一个方程和第三个方程得到 $\overline{S}=\dfrac{\Lambda-(1-\frac{\eta P}{d+\eta})\overline{i}(0)}{d}$,再由(1-2)的第三个方程得 $\overline{i}(0)$ 是以下方程 $g(x)=0$ 的根:

$$g(x)=\frac{\Lambda-(1-\frac{\eta P}{d+\eta})x}{d}\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)xda+(\frac{\eta P}{d+\eta}-1). \tag{1-3}$$

显然 $g(0)=0$，则存在一个无病平衡点 $E_0=\left(\frac{\Lambda}{d},0,0\right)$，又因为 $g(x)$ 是下凹的，由于 $g\left(\frac{\Lambda}{1-\frac{\eta P}{d+\eta}}\right)=-\Lambda<0$ 和 $g'(0)=\Re_0-1$，当 $\Re_0\le 1$ 时，$g'(x)<0$，模型(1-1)唯一的无病平衡点 E_0，当 $\Re_0>1$ 时，$g'(x)>0$，那么 $g(x)$ 有唯一的零点，则模型(1-1)。除了有一个无病平衡点 E_0，还有一个正平衡点 E^*，则有以下结论：

定理：对模型(1-1)，有以下结论：

(i)如果 $\Re_0\le 1$，则模型(1-1)有唯一的无病平衡点 $E_0=\left(\frac{\Lambda}{d},0,0\right)$。

(ii)如果 $\Re_0>1$，则模型(1-1)不但存在 E_0，还存在一个正平衡点 $E^*=(S^*,i^*,L^*)$。

其中 $S^*=\dfrac{\Lambda-(1-\frac{\eta P}{d+\eta})i^*(0)}{d}$，$i^*(a)=i^*(0)\pi(a)$，$L^*=\dfrac{P}{d+\eta}i^*(0)$，$i^*(0)$ 是方程(1-3)的根。

3 平衡点的局部稳定性

为了研究模型(1-1)的局部稳定性，我们在处线性化，线性化系统如下：

$$\begin{cases}\dfrac{dS(t)}{dt}=-(d+\int_0^\infty\beta(a)\bar{i}(a)da)S(t)-\bar{S}\int_0^\infty\beta(a)i(t,a)da,\\ \dfrac{\partial i(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(t,a)}{\partial a}=-(d+\gamma(a))i(t,a),\\ i(t,0)=S(t)\int_0^\infty\beta(a)\bar{i}(a)da+\bar{S}\int_0^\infty\beta(a)i(a)da+\eta L(t),\\ \dfrac{dL(t)}{dt}=\int_0^\infty\gamma(a)i(t,a)da-(d+\eta)L(t).\end{cases}\tag{1-4}$$

假设 $S(t)=x_0e^{\lambda t}$，$i(t,a)=y_0e^{\lambda t}$，$L(t)=z_0e^{\lambda t}$，代入(1-4)可得模型(1-1)的特征方程如下：

$$\begin{vmatrix}\lambda+d+\int_0^\infty\beta(a)\bar{i}(a)da & \bar{S}\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da & 0\\ -\int_0^\infty\beta(a)\bar{i}(a)da & \lambda-\bar{S}\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da & -\eta\\ 0 & -\hat{P}(\lambda) & \lambda+d+\eta\end{vmatrix}=0\tag{1-5}$$

其中 $\hat{P}(\lambda)\overset{\Delta}{=}\int_0^\infty\gamma(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da$，是 $\gamma\pi$ 的拉普拉斯变换。

定理：(i)如果 $\Re_0\le 1$，则无病平衡点 $E_0=\left(\frac{\Lambda}{d},0,0\right)$ 局部渐近稳定，如果 $\Re_0>1$，则 E_0 不稳定。

(ii)如果 $\Re_0>1$，则正平衡点 $E^*=(S^*,i^*,L^*)$ 局部渐近稳定。

证明：(i)无病平衡点 E_0 的特征方程为：

$$(\lambda+d)C(\lambda)=0\tag{1-6}$$

其中 $C(\lambda)=(1-\frac{\Lambda}{d}\hat{K}(\lambda))(\lambda+d+\eta)-\eta\hat{P}(\lambda)$，这里 $\hat{K}(\lambda)\overset{\Delta}{=}\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da$，是 $\beta\pi$ 的拉普拉斯变换。显然，d 是(1-6)的一个根，其它根是 $C(\lambda)=0$ 的根。

首先假设 $\Re_0>1$，那么因为 $C(0)=(1-\Re_0)(d+\eta)$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}C(\lambda)=\infty$，再根据中值定理可得 $C(\lambda)=0$ 有一个正根，即如果 $\Re_0>1$，那么无病平衡点 E_0 不稳定。

再假设 $\Re_0<1$，假设 $C(\lambda)=0$ 有一个非负实部解，则存在 $\lambda_0\in C$，$\mathrm{Re}(\lambda_0)>0$ 使得 $C(\lambda_0)=0$，我们有：

$$\left|1-\frac{\Lambda}{d}\hat{K}(\lambda_0)\right|=\left|\frac{\eta\hat{P}(\lambda_0)}{\lambda_0+d+\eta}\right|$$

又因为 $\Re_0<1$，$\mathrm{Re}(\lambda_0)>0$，可得：

$$\left|1-\frac{\Lambda}{d}\hat{K}(\lambda_0)\right|\ge\left|1-\left|\frac{\Lambda}{d}\hat{K}(\lambda_0)\right|\right|\ge 1-\frac{\Lambda K}{d}=1-\Re_0+\frac{\eta P}{d+\eta},$$

$$\left|\frac{\eta\hat{P}(\lambda_0)}{\lambda_0+d+\eta}\right|\le\frac{\eta P}{d+\eta}$$

综上，我们有 $\Re_0\ge 1$，这与 $\Re_0<1$ 的假设矛盾，则证明了如果 $\Re_0\le 1$，无病平衡点 E_0 局部渐近稳定。

(ii)正病平衡点 E^* 的特征方程为：

$$(\lambda+d)(\lambda+d+\eta)S^*\int_0^\infty\beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}da+\eta\hat{P}(\lambda)(\lambda+d+\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da)$$

$$=(\lambda+d+\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da)(\lambda+d+\eta) \qquad (1\text{-}7)$$

假设(1-7)有正实部，则(1-7)有一个$\mathrm{Re}(\lambda_0)\ge 0$的解，那么由(1-7)得：

$$i^*(0)=\frac{(\lambda_0+d)S^*\int_0^\infty\beta(a)i^*(0)\pi(a)e^{-\lambda_0 a}da}{\lambda_0+d+\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da}+\frac{\eta\hat{P}(\lambda_0)i^*(0)}{\lambda_0+d+\eta}$$

$$\le\frac{S^*\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da}{1+\frac{\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da}{\lambda_0+d}}+\frac{\eta Pi^*(0)}{d+\eta}$$

$$<S^*\int_0^\infty\beta(a)i^*(a)da+\frac{\eta Pi^*(0)}{d+\eta}$$

$$=i^*(0),$$

这是矛盾的，则我们的假设不成立，原命题成立，即如果$\Re_0>1$，则正平衡点E^*局部渐近稳定。

4 平衡点的全局稳定性分析

为了方便，我们定义：

$$B(t)=i(t,0)=S(t)\int_0^\infty\beta(a)i(t,a)da+\eta L(t).$$

模型(1-1)的第二个方程沿特征线$t=a$积分，得：

$$i(t,a)=\begin{cases}B(t-a)\pi(a),t\ge a,\\ i_0(a-t)\dfrac{\pi(a)}{\pi(a-t)},t\le a.\end{cases} \qquad (1\text{-}8)$$

对任意定义在$[0,\infty)$上的有界函数f，记$f^\infty=\limsup_{t\to\infty}f(t)$，

$$f_\infty=\liminf_{t\to\infty}f(t)$$

4.1定理：如果$\Re_0<1$，则无病平衡点E_0全局渐近稳定。

证明：首先我们证明$B^\infty=L^\infty=0$，这意味着$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{t\to\infty}L(t)=0$。

由波动引理[16]知存在一个序列$\{t_n\}$，使得$t_n\to\infty$，$L(t_n)\to L^\infty$和当$n\to\infty$时，$\dfrac{dL(t_n)}{dt}\to 0$由(1-8)，我们可得：

$$\frac{dL(t_n)}{dt}=\int_0^{t_n}\gamma(a)B(t_n-a)\pi(a)da+\int_{t_n}^\infty\gamma(a)i_0(a-t_n)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t_n)}da-(d+\eta)L(t_n)$$

$$\le\int_0^{t_n}\gamma(a)B(t_n-a)\pi(a)da+e^{-dt_n}\|\gamma\|_\infty\cdot\|i_0\|_1-(d+\eta)L(t_n)$$

令$n\to\infty$，且由波动引理[16]，可得

$$0\le B^\infty\gamma-(d+\eta)L^\infty\Rightarrow L^\infty\le\frac{B^\infty\gamma}{d+\eta}。$$

又因为$B(t)\le\dfrac{\Lambda}{d}\int_0^\infty\beta(a)i(t-a)da+\eta L(t_n)$

$$=\frac{\Lambda}{d}(\int_0^t\beta(a)B(t-a)\pi(a)da+\int_t^\infty\beta(a)i_0(a-t)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}da)+\eta L(t)$$

$$=\frac{\Lambda}{d}(\int_0^t\beta(a)B(t-a)\pi(a)da+\int_t^\infty\beta(a+t)i_0(a-t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}da)+\eta L(t)$$

$$\le\frac{\Lambda}{d}(\int_0^t\beta(a)B(t-a)\pi(a)da+e^{-dt}\|B\|_\infty\cdot\|i_0\|_1)+\eta L(t)$$

设$t\to\infty$，波动引理[16]，得：

$$B^\infty\le\frac{\Lambda}{d}B^\infty+\eta L^\infty\le\Re_0B^\infty$$

因为$\Re_0<1$，则$B^\infty=0$，又因为$B^\infty=0$，故，$L^\infty=0$。

再由波动引理[16]，存在一个一个序列$\{s_n\}$，使得$s_n\to\infty$，$S(s_n)\to S_\infty$和当$n\to\infty$时，$\dfrac{dS(s_n)}{dt}\to 0$可得：

$$\frac{dS(s_n)}{dt}=\Lambda-S(s_n)\int_0^\infty\beta(a)i(s_n,a)da-dS(s_n)$$

$$\ge\Lambda-B(s_n)-dS(s_n)$$

因为$\lim_{t\to\infty}B(t)=0$，则$S_\infty\ge\dfrac{\Lambda}{d}$. 又因为$S^\infty\le\dfrac{\Lambda}{d}$，故当$n\to\infty$时，$\lim_{t\to\infty}S(t)=\dfrac{\Lambda}{d}$.

因此$\lim_{t\to\infty}(S(t),i(t,\cdot),L(t))=E_0$，即如果$\Re_0<1$，则无病平衡点$E_0$全局渐近稳定。

4.2定理：如果$\Re_0>1$，则正病平衡点E^*是全局渐近稳定的。

证明：构造函数$\phi:(0,\infty)\to R$，$\phi(x)=x-1-\ln x$，$x\in(0,\infty)$。

设$\varphi(a)=\displaystyle\int_a^\infty(\beta(s)i^*(s)+\frac{\eta\gamma(s)}{(d+\eta)S^*}i^*(s))ds$，则：

$$\frac{d\varphi(a)}{da}=-\left[\beta(a)i^*(a)+\frac{\eta\gamma(a)}{(d+\eta)S^*}i^*(a)\right]$$

定义$V(t)=V_S(t)+V_i(t)+\dfrac{\eta L^*}{(d+\eta)S^*}V_L(t)$，

其中$V_S(t)=\phi(\frac{S(t)}{S^*})$，$V_L(t)=\phi(\frac{L(t)}{L^*})$，

$V_i(t)=\int_0^\infty \varphi(a)\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})da$. 那么$V$ 在 $x(t)$ 上是有界的：

$$\frac{dV_S(t)}{dt}=(1-\frac{S^*}{S(t)})\frac{1}{S^*}\left[\Lambda-dS(t)-S(t)\int_0^\infty \beta(a)i(t,a)da\right]$$

$$=(1-\frac{S^*}{S(t)})\frac{1}{S^*}\left[d(S^*-S(t))+S^*\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)da-S(t)\int_0^\infty \beta(a)i(t,a)da\right]$$

$$=-d(\frac{S^*}{S(t)}+\frac{S(t)}{S^*}-2)+\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)da\left[1-\frac{S(t)i(t,a)}{S^*i^*(a)}-\frac{S^*}{S(t)}+\frac{i(t,a)}{i^*(a)}\right]da$$

由 $d+\eta=\dfrac{\int_0^\infty \gamma(a)i^*(a)da}{L^*}$，可得：

$$\frac{dV_L(t)}{dt}=\frac{1}{L^*}(1-\frac{L^*}{L(t)})\left[\int_0^\infty \gamma(a)i(t,a)da-(d+\eta)L(t)\right]$$

$$=\frac{1}{L^*}(1-\frac{L^*}{L(t)})\left[\int_0^\infty \gamma(a)i(t,a)da-\frac{\int_0^\infty \gamma(a)i^*(a)da}{L^*}L(t)\right]$$

$$=\frac{1}{L^*}\int_0^\infty \gamma(a)i^*(a)(\frac{i(t,a)}{i^*(a)}-\frac{L(t)}{L^*}-\frac{L^*i(t,a)}{L(t)i^*(a)}+1)da$$

再根据当$t\in R, a\in R^+$时，有$\dfrac{i(t,a)}{i^*(a)}=\dfrac{B(t-a)}{i^*(0)}$，则有：

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=\int_0^\infty \varphi(a)\frac{\partial}{\partial t}\phi(\frac{B(t-a)}{i^*(0)})da$$

$$=-\int_0^\infty \varphi(a)\frac{\partial}{\partial a}\phi(\frac{B(t-a)}{i^*(0)})da$$

$$=-\int_0^\infty \varphi(a)\frac{\partial}{\partial a}\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})da$$

$$=-\varphi(a)\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})\Bigg|_{a=0}^{a=\infty}+\int_0^\infty \phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})\frac{d\varphi(a)}{da}da$$

$$=\varphi(0)\phi(\frac{i(t,0)}{i^*(0)})-\int_0^\infty\left[\beta(a)i^*(a)+\frac{\eta\gamma(a)}{(d+\eta)S^*}i^*(a)\right]\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})da$$

因为$\varphi(0)=\int_0^\infty\left[\beta(a)i^*(a)+\dfrac{\eta\gamma(a)}{(d+\eta)S^*}i^*(a)\right]da$，则：

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=\int_0^\infty\left[\beta(a)i^*(a)+\frac{\eta\gamma(a)}{(d+\eta)S^*}i^*(a)\right]\left[\phi(\frac{i(t,0)}{i^*(0)})-\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})\right]da$$

故：

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{dV_S(t)}{dt}+\frac{dV_i(t)}{dt}+\frac{\eta L^*}{(d+m+\eta)S^*}\frac{dV_L(t)}{dt}$$

$$=-d(\frac{S^*}{S(t)}+\frac{S(t)}{S^*}-2)$$

$$+\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left[\phi(\frac{i(t,0)}{i^*(0)})-\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})+1-\frac{S^*}{S(t)}+\frac{i(t,a)}{i^*(a)}-\frac{S(t)i(t,a)}{S^*i^*(a)}\right]da$$

$$+\frac{\eta}{(d+\eta)S^*}\int_0^\infty \gamma(a)i^*(a)$$

$$\cdot\left[\phi(\frac{i(t,0)}{i^*(0)})-\phi(\frac{i(t,a)}{i^*(a)})+\frac{i(t,a)}{i^*(a)}-\frac{L^*i^*(a)}{L(t)i(t,a)}+1-\frac{L(t)}{L^*}\right]da$$

$$=-d(\frac{S^*}{S(t)}+\frac{S(t)}{S^*}-2)$$

$$-\int_0^\infty \beta(a)i^*(a)\left[\phi(\frac{S^*}{S(t)})+\phi(\frac{S(t)i(t,a)i^*(0)}{S^*i^*(a)i(t,0)})\right]da$$

$$-\frac{\eta}{(d+\eta)S^*}\int_0^\infty \gamma(a)i^*(a)\left[\phi(\frac{L(t)i^*(0)}{L^*i(t,0)})+\phi(\frac{L^*i^*(a)}{L(t)i(t,a)})\right]da$$

令 $E=\left\{(S,i,L)\in\Omega \middle| G'(\mathrm{t})=0\right\}=\left\{S=S^*, L=L^*\right\}$，

由模型(1-1)求得，E 的最大不变集为$\left\{E^*\right\}$。由LaSalle不变集原理知，

当$\Re_0>1$时，正平衡点 E^* 全局渐近稳定。

5 结束语

近年来，由于传染病越来越多样化，加入染病年龄结构因素的传染病模型更能准确地描述一些疾病（如性病等）传播的实际情况。本文根据不同年龄的种群对某一种疾病的感染程度不一样，研究了一类具有染病年龄结构的伪狂犬病模型，得到了模型的基本再生数，当基本再生数小于或等于1时，无病平衡点全局渐进稳定；当基本再生数大于1，正平衡点也全局渐近稳定性。

[参考文献]

[1]郭建军.选择性捕食的生态-流行病系统研究[D].兰州大学,2010.

[2]王晓微.传染病动力学的数学建模与研究[D].上海大学,2009.

[3]唐晓明.具有饱和治疗函数和饱和发生率的传染病模型的分析[D].中北大学,2011.

作者简介：

刘文娟(1988--)，女，汉族，陕西西安人，硕士研究生，助教，研究方向：生物数学。