教育研究
Education Research
第 3 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

模的广义局部化在张量积上的性质

韩霖[1] 苏业芹[2]
1 四川大学锦城学院 2 西南财经大学
DOI:10.32629/er.v3i6.2812

[摘 要] 在给出交换模的广义局部化定义及部分性质的基础之上,在张量积上研究了相关性质,研究了交换模的广义局部化在张量积上的应用,并证明了算子 S_T^{-1} 的良好性状。
[关键词] 交换模；张量积；广义局部化

引言

设 A 是交换环，M 是 $A-$ 模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，在 $M\times S$ 中定义二元等价关系：

$$(a_1,s_1)\sim(a_2,s_2)\Leftrightarrow\exists\mu\in T,s.t.\mu(a_1s_2-a_2s_1)=0,$$

此等价类集合记为 $S_T^{-1}M$，每个等价类记为 x/s。

定义 $S_T^{-1}M$ 中的加法和乘法如下：

$$\frac{x}{s}+\frac{y}{t}=\frac{xt+ys}{st},\frac{a}{s}\cdot\frac{y}{t}=\frac{ay}{st}$$

其中 $x/s,y/t\in S_T^{-1}M,a/s\in S^{-1}A$，则是有单位元的交换 $S^{-1}A-$ 模(单位元为 s/s，零元为 $0/s$)。称为交换模 M 在 T 上关于 S 的广义局部化。

若 $A-$ 模同态列 $\varepsilon:0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to0$ 是正合列，S 为 A 中的乘法闭子集，则 $S^{-1}A-$ 模同态列 $S^{-1}\varepsilon:0\to S^{-1}M'\xrightarrow{S^{-1}f}S^{-1}M\xrightarrow{S^{-1}g}S^{-1}M''\to0$ 也是正合的。

若 M 是有限生成 $A-$ 模，S 为 A 中的乘法闭子集，则 $S^{-1}(Ann(M))=Ann(S^{-1}M)$。

若 A 是交换环，M，N，P 是 $A-$ 模，S 为 A 中的乘法闭子集. $f:M\to N$ 是 $A-$模同态，$S^{-1}f:S^{-1}M\to S^{-1}N$ 是 $S^{-1}A-$ 模同态，如果 $g:N\to P$ 也是 $A-$ 模同态，则 $S^{-1}g:S^{-1}N\to S^{-1}P$ 也是 $S^{-1}A-$ 模同态，且 $S^{-1}(gf)=S^{-1}(g)S^{-1}(f)$。

1 预备知识

引理1[1]若 A 是交换环 M,N，是 $A-$ 模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，设 $g:M\to N$ 是 $A-$ 模同态，对任意的 $x/s\in S_T^{-1}M$，$S_T^{-1}f(x/s)=g(x)/s$，则 $S_T^{-1}f$ 是 $S_T^{-1}M$ 到 $S_T^{-1}N$ 的 $S_T^{-1}A-$模同态。

引理2[1]若 $S_T^{-1}M$ 是 $S^{-1}A-$ 模，N 是 $S^{-1}A-$ 模，$g:M\to N$ 是 $A-$ 模同态，$f:M\to S_T^{-1}M$ 且 $f(x)=(sx)/s$，则存在唯一的 $S^{-1}A-$ 模同态 $h:S_T^{-1}M\to N$ 使得 $g=hf$。

引理3[1]若 A 是交换环，M 是 $A-$ 模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则 $S_T^{-1}A\otimes_A M\cong S_T^{-1}M$。

2 主要结论及证明

定理1若模同态列 $\varepsilon:M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''$ 是正合列，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则模同态列 $S_T^{-1}\varepsilon:S_T^{-1}M'\xrightarrow{S_T^{-1}f}S_T^{-1}M\xrightarrow{S_T^{-1}g}S_T^{-1}M''$ 也是正合的。

证明 由知 $gf=0$：$S_T^{-1}g\cdot S_T^{-1}f=S_T^{-1}(gf)=S_T^{-1}(0)=0$，所以，$\operatorname{Im}(S_T^{-1}f)\subseteq\ker(S_T^{-1}g)$

反之若 $m/s\in\ker(S_T^{-1}g)$，则 $g(m)/s=0/s\in S_T^{-1}M''$，

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

所以 $\exists t\in T, s.t. tsg(m)=0\in M''$，令 $u=ts$，则 $ug(m)=0\in M''$，但是 g 是 $A-$ 同态，从而 $g(um)=0$，所以 $um\in \ker g=\operatorname{Im} f$，即 $m'\in M', s.t. um=f(m')$，从而在 $S_T^{-1}M$ 中有

$m/s=f(m')/us=(S_T^{-1}f)(m'/us)\in \operatorname{Im}(S_T^{-1}f)$，

于是 $\ker(S_T^{-1}g)\subseteq \operatorname{Im}(S_T^{-1}f)$ 得证

定理2 若 N,P 均为 $A-$ 模 M 的子模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则

⑴ $S_T^{-1}(N+P)=S_T^{-1}N+S_T^{-1}P$。

⑵ $S_T^{-1}(N\bigcap P)=S_T^{-1}N\bigcap S_T^{-1}P$。

⑶ 有 $S^{-1}A-$ 模同构：$S_T^{-1}(M/N)\cong S_T^{-1}M/S_T^{-1}N$。

证明 ⑴ 设 $x\in S_T^{-1}(N+P)$，则 $x=(n+p)/s, (n\in N, p\in P, s\in S)$，但是 $\frac{n}{s}+\frac{p}{s}=\frac{ns+sp}{s^2}=\frac{s}{s}\cdot\frac{n+p}{s}=\frac{n+p}{s}=x$，因此 $x\in S_T^{-1}N+S_T^{-1}P$．反之若 $x\in S_T^{-1}N+S_T^{-1}P$，则 $x=n/s+p/t(n\in N, p\in P, s,t\in S)$，从而 $x=(nt+sp)/st\in S_T^{-1}(N+P)$。(因为) $tn\in N$，$sp\in P$，$st\in S$。

⑵ 设 $x\in S_T^{-1}N\bigcap S_T^{-1}P$，则 $x=n/s=p/t(n\in N, p\in P, s,t\in S)$，于是 $\exists u\in T$，使得 $u(tn-sp)=0$，令 $w=utn=usp$，则 $w\in N\bigcap P$，而 $x=n/s=w/ust\in S_T^{-1}(N\bigcap P)$。

反之若 $x\in S_T^{-1}(N\bigcap P)$，则显然 $x\in S_T^{-1}N\bigcap S_T^{-1}P$。

⑶ 由定理1知，对于 $A-$ 模短正合序列 $0\to N\to M\to M/N\to 0$ 经过正合算子 S_T^{-1} 的作用，给出 $S_T^{-1}A-$ 模短正合序列 $0\to S_T^{-1}N\to S_T^{-1}M\to S_T^{-1}(M/N)\to 0$，从而有 $S_T^{-1}A-$ 模同构 $S_T^{-1}(M/N)\cong S_T^{-1}M/S_T^{-1}N$。

推论1 若 N,P 均为 $A-$ 模 M 的子模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则 $S_T^{-1}(N\oplus P)=S_T^{-1}N\oplus S_T^{-1}P$。

推论2 若 $N_i, i\in I$ 为 $A-$ 模 M 的子模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则 $S_T^{-1}(\sum_{i\in I}N_i)=\sum_{i\in I}(S_T^{-1}N_i)$。

定理3 若 M,N 是 $A-$ 模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则存在 $S_T^{-1}A-$ 模同构：

$$S_T^{-1}(M\otimes_A N)\cong S_T^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S_T^{-1}N。$$

证明 由引理3可得

$$S_T^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S_T^{-1}N\cong(M\otimes_A S_T^{-1}A)\otimes_{S^{-1}A}S_T^{-1}N$$

$$\cong M\otimes_A(S_T^{-1}A\otimes_{S^{-1}A}S_T^{-1}N)\cong M\otimes_A S_T^{-1}N$$

$$\cong M\otimes_A(N\otimes_A S_T^{-1}A)\cong(M\otimes_A N)\otimes_A S_T^{-1}A$$

$$\cong S_T^{-1}(M\otimes_A N)$$

下面的引理表明算子 S_T^{-1} 的良好性状。

定理4 若 M 是有限生成 $A-$ 模，S,T 为 A 中的乘法闭子集，且 $S\subseteq T$，则 $S_T^{-1}(Ann(M))=Ann(S_T^{-1}M)$，(两边均是 $S^{-1}A$ 的理想)。

证明 若引理对 $A-$ 模 N 和 P 成立，即

$$S_T^{-1}(Ann(N))=Ann(S_T^{-1}N),$$

$$S_T^{-1}(Ann(P))=Ann(S_T^{-1}P)，则$$

$$S_T^{-1}(Ann(N+P))=S_T^{-1}(Ann(N)\bigcap Ann(P))$$

$$=S_T^{-1}(Ann(N))\bigcap S_T^{-1}(Ann(P))$$

$$=Ann(S_T^{-1}N)\bigcap Ann(S_T^{-1}P)$$

第 3 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$$= Ann(S_T^{-1}N + S_T^{-1}P) = Ann(S_T^{-1}(N+P))$$

即引理对 $N+P$ 也成立，由于有限生成 $A-$ 模是有限个循环 $A-$ 模的和，从而只需对 M 是循环 $A-$ 模的情形即可。但是循环 $A-$ 模 M 均同构与 A/α，α 为循环 $A-$ 模的某个理想，所以 $Ann(M)=Ann(A/\alpha)=\alpha$，由定理2(3)得 $S_T^{-1}M \cong S_T^{-1}A/S_T^{-1}\alpha$。

于是

$$Ann(S_T^{-1}M) = Ann(S_T^{-1}A/S_T^{-1}\alpha) = S_T^{-1}\alpha = S_T^{-1}(Ann(M))$$

得证

我们知道张量积的泛性质在代数的过程中起着重要的作用，在模的局部化作用下易知 $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$，$(m/s)\otimes_{S^{-1}A}(n/t)$ 是张量积，那么有张量积的泛性质，我们可以得到下面的引理。

引理4 若 M,N,P 均为 $A-$ 模，S 为 A 中的乘法闭子集，即 $\forall a,b\in S, ab\in S$，且 $1\in S$。

$h: S^{-1}M\times S^{-1}N \to S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$ 为标准同态映射，即 $h(m/s,n/t)=(m/s)\otimes_{S^{-1}A}(n/t)$

则对每一个双线性映射 $f: M\times N\to P$，均有唯一的 $S^{-1}A-$ 模同态 $f': S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N\to P$，使得 $f=f'h$。

定理5 若 M,N,P 均为 $A-$ 模，S 为 A 中的乘法闭子集，$S^{-1}f: S^{-1}M\to S^{-1}N$，$S^{-1}f': S^{-1}M'\to S^{-1}N'$ 为 $S^{-1}A-$ 模同态，定义映射

$$S^{-1}M\times S^{-1}M' \to S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N',$$

$$\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\right)\to \frac{f(m)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

则此映射为双线性映射，从而诱导出唯一的 $S^{-1}A-$ 模同态

$$S^{-1}f\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}f': S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}M' \to S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N',$$

$$\frac{m}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{m'}{s'}\to\frac{f(m)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

并且如果又有 $S^{-1}A-$ 模同态 $S^{-1}g: S^{-1}N\to S^{-1}P$ 和 $S^{-1}g': S^{-1}N'\to S^{-1}P'$，易知有

$$(S^{-1}g\otimes S^{-1}g')(S^{-1}f\otimes S^{-1}f') = S^{-1}gS^{-1}f\otimes S^{-1}g'S^{-1}f'$$

证明 先证映射是双线性映射

$$g: S^{-1}M\times S^{-1}M' \to S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N',$$

$\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\right)\to\frac{f(m)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$. 对任意的

$\frac{m}{s},\frac{m_1}{s_1}\in S^{-1}M, \frac{m'}{s'},\frac{m_1'}{s_1'}\in S^{-1}M', \frac{r}{s}\in S^{-1}A$ 有

$$g\left(\frac{m}{s}+\frac{m_1}{s_1},\frac{m'}{s'}\right)=g\left(\frac{ms_1+sm_1}{ss_1},\frac{m'}{s'}\right)=\frac{f(ms_1+sm_1)}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

$$=\frac{f(ms_1)+f(sm_1)}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}=\frac{f(m)s_1+f(m_1)s}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

$$=\frac{f(m)s_1}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}+\frac{f(m_1)s}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

$$=\frac{f(m)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}+\frac{f(m_1)}{s_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}=g\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\right)+g\left(\frac{m_1}{s_1},\frac{m'}{s'}\right)$$

类似地可证

$$g\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}+\frac{m_1'}{s_1'}\right)=g\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\right)+g\left(\frac{m}{s},\frac{m_1'}{s_1'}\right)$$

$$\frac{r}{s}g\left(\frac{m_1}{s_1},\frac{m_1'}{s_1'}\right)=\frac{r}{s}\cdot\frac{f(m_1)}{s_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m_1')}{s_1'}=\frac{f(rm_1)}{ss_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m_1')}{s_1'}$$

$$=g\left(\frac{r}{s}\cdot\frac{m_1}{s_1},\frac{m_1'}{s_1'}\right)=\frac{f(m_1)}{s_1}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(rm_1')}{ss_1'}=g\left(\frac{m_1}{s_1},\frac{r}{s}\cdot\frac{m_1'}{s_1'}\right)$$

故此映射是双线性映射，所以由张量积的泛性质知：诱导出唯一的 $S^{-1}A-$ 模同态类似地，可以诱导唯一的 $S^{-1}A-$ 模同态：

$$S^{-1}f\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}f': S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}M' \to S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N',$$

$$\frac{m}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{m'}{s'}\to\frac{f(m)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(m')}{s'}$$

$$S^{-1}g\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}g':S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}N'\rightarrow S^{-1}P\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}P',$$

$$\frac{n}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{n'}{s'}\rightarrow\frac{f(n)}{s}\otimes_{S^{-1}A}\frac{f(n')}{s'}$$

又因为有前面的引言知识知道下图可交换，且

$$S^{-1}(gf)=S^{-1}(g)S^{-1}(f)$$

$$S^{-1}M\xrightarrow{S^{-1}f}S^{-1}N$$

$$\searrow S^{-1}P\nearrow$$

那么由此诱导的下面 $S^{-1}A-$ 模同态也可交换

$$S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}M'\rightarrow S^{-1}N\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}N'$$

$$\searrow\qquad\qquad\swarrow$$

$$S^{-1}P\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}P'$$

于是

$$(S^{-1}g\otimes S^{-1}g')(S^{-1}f\otimes S^{-1}f')=S^{-1}gS^{-1}f\otimes S^{-1}g'S^{-1}f'$$

得证

3 结论

本文深入的研究了交换模广义局部化在张量积上的性质，并证明了算子的良好性状。

[参考文献]

[1]王秋丽，苏业芹.交换模的广义局部化[J].商丘师范学院学报,2012,(28):19-22.

[2]王磊，赵静.交换环的广义局部化[J].滨州学院学报,2011,(27):66-69.

[3]唐敬英.关于局部化的广义可补子群[D].扬州大学,2017.

[4]曹卫红,何小飞.交换半模的局部化[J].吉首大学学报:自然科学版,2005,(26):75-78.

[5]刘红星.半环的局部化[J].山东大学学报:理学版,2006,41(4):31-33.

[6]陈静，陈旻霞，魏俊潮.广义局部环的性质[J].大学数学,2018,34(03):7-11.

[7]冯克勤.交换代数基础[M].贝宁:高等教育出版社,1986.

[8]Hungeford T W.冯克勤,译.聂灵沼,校.代数学[M].长沙:湖南教育出版社,1985.

作者简介：

韩霖(1988--),女,回族,河南商丘人,讲师,硕士,研究方向：应用数学。

苏业芹(1987--),女,汉族,河南商丘人,博士在读,研究方向:基础数学。