第 8 卷◆第 2 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

拉格朗日中值定理解决有关中值问题方法探讨

郑凯悦 韩成茂
临沂大学
DOI:10.12238/er.v8i2.5818

摘　要：拉格朗日中值定理是微分学中的一个重要定理，它在函数值与导数值之间建立了联系，是研究函数的重要理论工具，其应用非常广泛。本文主要介绍拉格朗日中值定理在解决有关中值等式与不等式等问题时应用，重点给出解决问题的思路分析、辅助函数的构造及方法步骤。
关键词：拉格朗日中值定理；中值等式；不等式；辅助函数
中图分类号：O13 **文献标识码：**A

Exploration of Lagrange's Mean Value Theorem for Solving Mean Value Problems

Kaiyue Zheng, Chengmao Han
Linyi University

Abstract: The Lagrange's Mean Value Theorem is a significant theorem in differential calculus that establishes a connection between function values and derivative values. It serves as an essential theoretical tool for studying functions and has broad applications. This paper primarily introduces the application of the Lagrange Mean Value Theorem in solving problems related to mean value equalities and inequalities. Emphasis is placed on analyzing the problem−solving approach, constructing auxiliary functions, and detailing the procedural methods involved.
Keywords: Lagrange's Mean Value Theorem; Mean Value Equality; Inequality; Auxiliary Function

引言

微分中值定理是微分学中的重要定理，包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒中值定理，而拉格朗日中值定理又是其中最重要的一个定理，它既是罗尔定理的推广，又是柯西中值定理和泰勒中值定理的特殊情形。深刻理解并掌握拉格朗日中值定理的条件、结论及应用对微积分的学习非常重要。

一、拉格朗日中值定理及其表述形式

（一）拉格朗日中值定理的一般形式

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),$$

或

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

或

$$f(b)-f(a) = f'\left[a+\theta(b-a)\right](b-a)(0<\theta<1)$$

.

（二）拉格朗日中值定理的有限增量形式

如果函数 $f(x)$ 在点 x 的某邻域内可导，$x+\Delta x$ 也在该邻域内，则存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'\left[x+\theta\Delta x\right]\Delta x.$$

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x，$x_0 \in (a,b)$，则存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(x) - f(x_0) = f'\left[x_0+\theta(x-x_0)\right](x-x_0).$$

说明 拉格朗日中值定理建立了函数在区间上的增量、自变量的增量及区间内某点的导数值之间的关系.

二、拉格朗日中值定理解决有关中值问题的两种常见类型

拉格朗日中值定理的应用比较广泛，一般应用于解决符合某些条件的中值等式、不等式的证明、方程根的存在性判断、函数性质的证明等。下面主要给出拉格朗日中值定理在等式及不等式证明方面的应用。

文章类型：论文｜刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

（一）利用拉格朗日中值定理证明中值等式问题

如果要证明的中值等式中含有函数的增量、自变量的增量及中值处的导数，或者能够通过等价变形化为函数的增量、区间的增量及中值处的导数的等式，就可以考虑使用拉格朗日中值定理。

（二）利用拉格朗日中值定理证明不等式问题

应用拉格朗日中值定理证明含有函数增量及自变量增量的不等式。由中值公式 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 中的中值点 ξ 的范围 $a<\xi<b$，得到 $f'(\xi)$ 的不等式，从而得到关于 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的不等式。

三、拉格朗日中值定理解决有关中值问题的方法及步骤

（一）确定问题的类型

如果要证明的问题中条件或结论包含函数值、导数值、自变量的取值，尤其是含有函数的增量，且要证明的结论为与之相关的等式或不等式，那么就可以考虑使用拉格朗日中值定理。

（二）构造解决问题的辅助函数

1.如果要证明的结论中明显含有函数值增量与自变量增量的比值，则结论中的与函数值相关的函数即为辅助函数。

2.若函数不能直接确定，则先通过等价变换把要证明的等式或不等式转换为一端含有函数增量与自变量增量的比值的形式，另一侧含有中值的表达式，然后构造辅助函数。

3.对含有两个中值的等式，则需要在两个不同的区间上分别找出满足拉格朗日中值定理的条件，然后构造辅助函数.若直接构造辅助函数有困难，有时可以考虑乘以、除以不影响结果的 e^x, x^n 等后再来构造辅助函数。

（三）验证辅助函数满足定理的条件得出结论

对构造的辅助函数，验证它满足拉格朗日中值定理的条件，然后得到中值等式，最后通过推导、变形得到最终要证明的结论。

四、拉格朗日中值定理解决有关中值问题的典型举例

例 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，试证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{b^3 f(b)-a^3 f(a)}{b-a}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right].$$

分析　欲证等式左端的分母恰为自变量的增量，分子恰为函数 $x^3\cdot f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量，而右端恰为 $x^3\cdot f(x)$ 在 ξ 处的导数，所以可以直接构造辅助函数 $F(x)=x^3\cdot f(x)$，在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理就可以了。

证明　设 $F(x)=x^3\cdot f(x)$，则 $F(x)=x^3\cdot f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$b^3 f(b)-a^3 f(a)=F'(\xi)(b-a),$$

又 $F'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)$，所以

$$b^3 f(b)-a^3 f(a)=\left[3\xi^2\cdot f(\xi)+\xi^3\cdot f'(\xi)\right](b-a),$$

即

$$\frac{b^3 f(b)-a^3 f(a)}{b-a}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right].$$

例 2　设 $b>a>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(a-b)(1-\xi)e^\xi.$$

分析　欲证等式中虽有自变量的增量，但左端是哪一个函数的增量不能直接确定，所以不能直接构造辅助函数，可以对欲证等式进行等价变换. 欲证等式等价于

$$\frac{ae^b-be^a}{a-b}=(1-\xi)e^\xi,$$

上式左端分子分母同除 ab，得

$$\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^\xi,$$

又可变形为

文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$$\frac{\frac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}-\frac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\left(1-\xi\right)e^{\xi},$$

由于$b>a>0$，则$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，所以上式又可化为

$$\frac{\frac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}-\frac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(1-\xi\right)e^{\xi},$$

上式左端分母为区间$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$的长度，分子可以看成是函数$xe^{\frac{1}{x}}$在区间$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$上的增量，因此可构造辅助函数$F\left(x\right)=xe^{\frac{1}{x}}$.

证明　令$F\left(x\right)=xe^{\frac{1}{x}}$，则$F\left(x\right)$在$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$上满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在$\eta\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，使得

$$\frac{F\left(\frac{1}{a}\right)-F\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=F'\left(\eta\right),$$

即

$$\frac{\frac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}-\frac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(1-\frac{1}{\eta}\right)e^{\frac{1}{\eta}}.$$

由于　$\frac{1}{b}<\eta<\frac{1}{a}$，所以　$a<\frac{1}{\eta}<b$，令$\xi=\frac{1}{\eta}$，则有$\xi\in\left(a,b\right)$，使得

$$\frac{\frac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}-\frac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(1-\xi\right)e^{\xi},$$

整理即得　$ae^{b}-be^{a}=\left(a-b\right)\left(1-\xi\right)e^{\xi}$.

例 3　设$f\left(x\right)$在闭区间$\left[0,1\right]$上连续，在$\left(0,1\right)$内可导，且$f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$，证明对任意给定的正数a,b，存在不同的$\xi,\eta\in\left(0,1\right)$，使得$\frac{a}{f'\left(\xi\right)}+\frac{b}{f'\left(\eta\right)}=a+b$.

分析　要证明的等式中有两个不同的中值，可考虑给定区间分段，在每个小区间分别用拉格朗日中值定理.本题的关键是如何找到区间的分界点。因$f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$，a,b为正数，且$0<\frac{a}{a+b}<1$，于是可利用连续函数介值定理，存在点$\tau\in\left(0,1\right)$，使得　$f\left(\tau\right)=\frac{a}{a+b}$，$\tau$就可作为区间的分界点.然后考虑在$\left[0,\tau\right]$和$\left[\tau,1\right]$使用拉格朗日中值定理。

证明　因a,b为正数，所以$0<\frac{a}{a+b}<1$，由连续函数介值定理，存在点$\tau\in\left(0,1\right)$，使得　$f\left(\tau\right)=\frac{a}{a+b}$.

于是$f\left(x\right)$在$\left[0,\tau\right]$与$\left[\tau,1\right]$上分别满足拉格朗日中值定理，即$\xi\in\left(0,\tau\right),\eta\in\left(\tau,1\right)$，使得

$$f\left(\tau\right)-f\left(0\right)=f'\left(\xi\right)\left(\tau-0\right),$$

$$f\left(1\right)-f\left(\tau\right)=f'\left(\eta\right)\left(1-\tau\right).$$

文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

又 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$，所以

$$\frac{a}{a+b}=f'(\xi)\cdot\tau,$$

$$1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}=f'(\eta)(1-\tau),$$

所以有 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}=\tau$，$\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1-\tau$.两式相加

得 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=1$，

两边同乘 $(a+b)$，即得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例 4 若 $a>b>0$，$n>1$，则 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}\cdot(a-b)$.

分析 欲证不等式可改写为

$$nb^{n-1}<\frac{a^n-b^n}{a-b}<na^{n-1}.$$

因 $a>b>0$，所以可构成区间 $[b,a]$，而 (a^n-b^n) 恰好可看成函数 x^n 在区间 $[b,a]$ 上的增量，$\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$ 就是函数增量与自变量增量之比，且 $(x^n)'=nx^{n-1}$，因此可考虑对函数 x^n 在 $[b,a]$ 上使用拉格朗日中值定理。

证明 令 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，且 $f'(x)=nx^{n-1}$.

由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(b,a)$，使得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$.

因 $0<b<\xi<a$，所以 $b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$，于是

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

故

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}\cdot(a-b).$$

例 5 当 $x>0$ 时，$x<e^x-1<xe^x$.

分析 欲证不等式可改写为

$$1<\frac{e^x-e^0}{x-0}<e^x.$$

因 $x>0$，所以可构成区间 $[0,x]$，而 (e^x-e^0) 恰好可看成函数 e^t 在区间 $[0,x]$ 上的增量，$\dfrac{e^x-e^0}{x-0}$ 就是函数增量与自变量增量之比，且 $(e^t)'=e^t$，因此可考虑对函数 e^t 在 $[0,x]$ 上使用拉格朗日中值定理。

证明 令 $f(t)=e^t$，则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，且 $f'(t)=e^t$.

由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),$$

即 $e^x-1=e^{\xi}x$.

因 $0<\xi<x$，所以 $e^0<e^{\xi}<e^x$，于是 $x=e^0x<e^{\xi}x<e^xx$，

故 $x<e^x-1<xe^x$.

五、结论

拉格朗日中值定理是微分学理论发展的重要成果，无论在理论上还是在应用上都及其重要，对该定理的理解和掌握程度直接影响到对整个微分学的理解和掌握，因此，在学习微分学这部分内容时一定要把该定理理解透彻。以上几个例子介绍了拉格朗日中值定理的两个典型应用，当然其应用还有其它很多情形，我们应用定理时需要根据条件恰当地构造辅助函数，有时也需要结合罗尔定理、柯西中值定理等来解决问题。

[参考文献]

[1]同济大学数学科学学院.高等数学(第八版)[M].高等教育出版社,2023.6.

[2]李永乐,王式安,武忠祥.数学过关 660 题(第 1 版)[M].西安交通大学出版社,2018.10.

[3]黄海松.拉格朗日中值定理的应用[J].柳州职业学院学报.2018.18(3),104-109.

作者简介：

第一作者：郑凯悦（2002 年 11 月生），女，汉族，山东泰安人，数学与应用数学专业本科在读.

通讯作者：韩成茂（1971 年 1 月生），男，汉族，山东临沂人，硕士，副教授，研究方向为基础数学.