教育研究
Education research
第 2 卷◆第 3 期◆版本 1.0◆2019 年 3 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

$Li_s(z)$ 函数一种特殊形式的表示

乔峰　马越好
陕西科技大学文理学院
DOI:10.32629/er.v2i3.1752

[摘　要] 本文在 $s\le 0, s\in Z$ 时从 $Li_s(z)$ 函数级数形式出发,推导出函数取前 n 项的递推公式,并在此基础之上推导出 $Li_s(z)$ 的递推公式,本文还引入新的算符 O,将 $Li_s(z)$ 表示为 $O^{|s|}Li_0(z)$ 的简洁形式,从而使 $Li_s(z)$ 函数的形式更加简洁和对称。最后本文用错项相减法推导出另一类级数取前 n 项的求和递推关系式,并给出其与黎曼函数 $\zeta(s)$ 的关系。
[关键词] $Li_s(z)$ 函数；有限项和；定义算符；错项相减法

引言

关于函数的研究,有很长一段历史[1],并且也有了深刻而明确的认识[2][3]。关于其递推式的研究中,尽管有些文献[4]中给出了递推关系式,但由其最终的公式并不能计算出和实际吻合的,因此本文从函数取前项的一般形式出发,推导出一般形式下的递推公式,再由此推导出时的递推公式。

1 主要结果

1.1 $Li_s(z)$ 的有限项形式

定理 1 当 $s\le 0$ 且 $|z|\le 1$ 时,函数可写为 $Li_{-m}(z)$,$m\ge 0$ 设 $Li_{-m}(z)$ 级数形式的前 n 项和用 $Li_{(-m,n)}(z)$ 表示,则:

$$Li(-m,n)(z)$$

$$=\frac{z}{1-z}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}Li_{(k,n)}(z)+\frac{z-(n+1)^m z^{n+1}}{1-z},m\ge 1$$

证明因为:

$$(n+1)^m z^{n+1}-n^m z^n$$

$$=\left(\binom{m}{0}n^0+\cdots+\binom{m}{k}n^k+\cdots+\binom{m}{m-1}n^{m-1}\right)z^{n+1}$$

$$+n^m z^n(z-1),m\ge 1$$

所以:

$$(i+1)^m z^{i+1}-i^m z^i$$

$$=\left(\binom{m}{0}i^0+\cdots+\binom{m}{k}i^k+\cdots+\binom{m}{m-1}i^{m-1}\right)z^{i+1}$$

$$+i^m z^i(z-1)$$

$$(1+1)^m z^{1+1}-1^m z^1$$

$$=\left(\binom{m}{0}1^0+\cdots+\binom{k}{m}1^k+\cdots+\binom{m}{m-1}1^{m-1}\right)z^{1+1}$$

$$+1^m z^1(z-1)$$

将以上 n 式相加得:

$$(n+1)^m z^{n+1}-1^m z^1$$

$$=z\binom{m}{0}Li_{(0,n)}(z)+\cdots+z\binom{m}{k}Li_{(-k,n)}(z)+\cdots+$$

$$z\binom{m}{m-1}Li_{(1-m,n)}(z)+(z-1)Li_{(-m,n)}(z)$$

$$=z\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}Li_{(-k,n)}(z)+(z-1)Li_{(-m,n)}(z)$$

即:

$$Li_{(-m,n)}(z)$$

$$=\frac{z}{1-z}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}Li_{(-k,n)}(z)+\frac{z-(n+1)_m}{1-z},m\ge 1$$

此即完成了定理的证明,由上式我们很容易求出 $Li_s(z)$ 无穷项的形式,只需在两边同时让 n 趋于无穷大,即为所要求的结果。

1.2 $Li_s(z)$ 的无穷项形式

当 $n\to\infty$ 时上式 $Li_s(z)$ 即变为函数 $s\le 0$ 时的无穷项递推关系式:

$$\lim_{n\to\infty}Li_{(-m,n)}(z)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{z}{1-z}\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k}^{m}Li_{(-k,n)}(z)+\frac{z-(n+1)^m z^{n+1}}{1-z}\right]$$

即：

$$Li_{-m}(z) = \frac{z}{1-z}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}Li_{-k}(z)+\frac{z}{1-z}, m\ge 1$$

由于：$Li_0(z)=\frac{z}{1-z}$

将其带入上述迭代公式, 即可分别解得：

$$Li_{-1}(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$Li_{-2}(z)=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

$$Li_{-3}(z)=\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4}$$

$$Li_{-4}(z)=\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(1-z)^5}$$

$$Li_{-5}(z)=\frac{z(z^4+26z^3+66z^2+26z+1)}{(1-z)^6}$$

由上述递推公式原则上可以根据 $Li_0(z)$ 计算出任意的 $Li_s(z), s<0,$ 但当 $|s|$ 很大时, 由于它前面的 $s-1$ 个函数都包含在递推关系式中, 所以在具体计算时将会变得非常复杂, 若能将 $Li_s(z)$ 表示为 $Li_0(z)$ 的某种形式, 从而避免把前 $s-1$ 个函数引入到计算中, 从而将计算大大简化。

2 $Li_s(z)$ 的算符表示形式

2.1 $s\le 0$ 的形式

此时函数可写为：

$$Li_{-m}(z)=1^m z^1+2^m z^2+\cdots k^m z^k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k^m z^k$$

$$=z\sum_{k=1}^{\infty}k^m z^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{m-1}z^k\right)=zLi_{1-m}{}'(z), m\ge 1$$

则：$Li_{-1}(z)=zLi_o{}'(z)$

$$Li_{-2}(z)=z\left[zLi_o{}'(z)\right]'$$

若定义算符, $O=z\frac{d}{dz}$ 则由数学归纳法易得出：

$$Li_s(z)=O^{-s}Li_0(z), s\le 0$$

2.2 $s>0$ 的形式

此时函数为：

$$Li_s(z)=\frac{z^1}{1^s}+\frac{z^2}{2^s}+\cdots\frac{z^k}{k^s}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{s-1}}\cdot\frac{z^k}{k}=\int_0^z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{s-1}}t^{k-1}dt$$

$$=\int_0^z\frac{1}{t}Li_{s-1}(t)dt, s\ge 1$$

所以：$Li_1(z)=\int_0^z\frac{Li_0(t)}{t}dt$

$$Li_2(z)=\int_0^z\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{Li_0(t_1)}{t_1}dt_1dt_2$$

若此时定义 O 算符为：$OLi_s(z)=\int_0^z\frac{Li_s(t)}{t}dt$

由数学归纳法同样可得出：$Li_s(z)=O^sLi_0(z), s>0$

综上所述, 可将表示为：$Li_s(z)=O^{|s|}Li_0(z)$

其中：

$$OLi_s(z)=\begin{cases} z\frac{dLi_s(z)}{dz}, s\le 0 \\ \int_0^z\frac{Li_s(t)}{t}dt, s>0\end{cases}$$

上式将 $Li_s(z)$ 表示为 $Li_0(z)$ 的形式, 上式表明当 S 为有限值时, $Li_s(z)$ 可由 O 算符对 $Li_0(z)$ 作用有限次而得到, 它反映了 $Li_k(z), k=\pm1,\pm2\cdots$ 与 $Li_0(z)$ 的关系, 同时也简化了 $Li_s(z)$ 的具体计算, 当然也使 $Li_s(z)$ 函数的形式更加对称和简洁。

3 一类相似级数的求和

考虑一类有限项级数 $\left\{n^m\right\}, m=0,1,2,\cdots$，设其前 n 项和为 $S_{(m,n)}$，即：$S_{(m,n)}=1^m+2^m+\cdots k^m+\cdots n^m$

用前文所用的错项相减法得：

$$(n+1)^m-n^m =\binom{m}{0}n^0+\binom{m}{1}n^1+\cdots\binom{m}{k}n^k+\cdots\binom{m}{m-1}n^{m-1}$$

所以是：

$$(n)^s-(n-1)^m =\binom{m}{0}(n-1)^0+\binom{m}{1}(n-1)^1+\cdots\binom{m}{k}(n-1)^k +\cdots\binom{m}{m-1}(n-1)^{m-1}$$

$$(i+1)^m-i^m =\binom{m}{0}i^0+\binom{m}{1}i^1+\cdots\binom{m}{k}i^k+\cdots\binom{m}{m-1}i^{m-1}$$

$$(2)^m-1^m =\binom{m}{0}1^0+\binom{m}{1}1^1+\cdots\binom{m}{k}1^k+\cdots\binom{m}{m-1}1^{m-1}$$

将以上 n 式相加得：

$$(n+1)^m-1 =\binom{m}{0}S_{(0,n)}+\binom{m}{1}S_{(1,n)}+\cdots\binom{m}{k}S_{(k,n)} +\cdots\binom{m}{m-1}S_{(m-1,n)}$$

即：

$$S_{(m-1,n)}=\frac{(n+1)^m-1}{m}-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m}{k}S_{(k,n)}, m\geq 2$$

也即：

$$S_{(m,n)} =\frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}S_{(k,n)}, m\geq 1$$

由上式容易得出：

$$S_{(1,n)}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{(2,n)}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_{(3,n)}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_{(4,n)}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

当 $z=1$，$n\to\infty$ 时，函数变为 $S_{(m,n)}$ 级数：

$$Li_{-m}(z)=\lim_{n\to\infty}S_{(m,n)}, m=0,1,2,\cdots$$

值得注意的是，当 m 为复数，且 $\mathrm{Re}(m)<-1$ 时，若同时 $n\to\infty$ 时，变为黎曼函数 $\zeta(s)$，即：

$$\lim_{n\to\infty}S_{(m,n)}=\zeta(s), \mathrm{Re}(m)<-1$$

[参考文献]

[1]劳会学.自守 L-函数系数的均值估计[D].山东大学,2009,(05):103.

[2]蒋玉蛟.关于 L-函数系数的若干问题[D].山东大学,2017,(08):93.

[3]何圆,张家玲.关于 polylogarithm 函数新的循环公式[J].数学杂志,2017,37(6):1154-1160.