第 2 卷◆第 9 期◆版本 1.0◆2019 年 9 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

多线性分数次积分算子的迭代交换子在 Lipschitz 空间上有界性

房成龙
伊犁师范大学数学与统计学院
DOI:10.32629/er.v2i9.2003

[摘　要] 结合 Lipschitz 函数的性质,本文证明了多线性分数次积分算子与 Lipschitz 函数生成的迭代交换子从乘积 Lebesgue 空间到 Lipschitz 空间的有界性。
[关键词] 多线性分数次积分；迭代交换子；Lipschitz 空间；Lebesgue 空间；有界性

引言和定义

多线性算子的研究起源于20世纪70年代,Coifman等人在文献[1-2]首次研究了双线性奇异积分算子,发现Calderòn-Zygmund奇异积分算子交换子可以归结为一类双线性奇异积分算子。之后,学者们开始了多线性算子及其交换子的研究.值得注意的是：

1999年,Kenig和Stein[3]获得了双线性分数次积分算子从乘积Lebesgue空间到Lebesgue空间有界。

2011年,默会霞和张志英[4]证明了双线性分数次积分算子与Lipschitz函数生成的交换子从乘积Lebesgue空间到Lebesgue空间或Triebel-Lizorkin空间有界。

受上面结果启发,本文作者将去证明多线性分数次积分算子与Lipschitz函数生成的一种迭代交换子从乘积Lebesgue空间到Lipschitz空间的有界性。下面介绍其定义：

定义1 设 $0<\alpha<2n$，多线性分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 定义为：

$$I_{\alpha,m}(\vec{f})(x)$$
$$=\int_{R^n}\int_{R^n}\cdots\int_{R^n}\frac{f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)}{(|x-y_1|+|x-y_2|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}dy_1dy_2\cdots dy_m$$

其中 $x\in R^n$，$\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$。

假设 b 是局部可积函数,多线性分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 的迭代交换子定义为：

$$[\prod\vec{b},I_{\alpha,m}](\vec{f})(x)$$
$$=\int_{R^n}\int_{R^n}\cdots\int_{R^n}\frac{\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-b_i(y_i))f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)}{(|x-y_1|+|x-y_2|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}dy_1dy_2\cdots dy_m$$

交换子有两大类,分别是BMO和Lipschitz函数,本文将讨论多线性分数次积分算子与Lipschitz函数生成的一种迭代交换子,下面介绍Lipschitz空间定义。

定义2 设 $\beta>0$，若函数 f 满足

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in R^n,h\neq0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\beta}<\infty,$$

则称其属于Lipschitz空间 $\Lambda_\beta(R^n)$。

本文中对于一个集合A, χ_A 表示其特征函数, C 表示常数,每次出现时有可能其值并不相同,当 $C>0$ 时,若 $A<CB$ 且 $B<CA$, 则 $A\approx B$，另外,对方体Q, $f_Q=\frac{1}{Q}\int_Q f(x)dx$。

1 引理和主要结果

众所周知,在研究算子与Lipschitz函数生成交换子的问题中,需要借助于Lipschitz函数相关的一些性质,下面介绍与本文相关性质：

引理1 若 $0<\beta<1$，$1<q\le\infty$，则

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|f(x)-f_Q|dx$$

$$\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^q dx)^{1/q}$$

引理2设 $1<p<q<\infty$，$1/p-1/q=\alpha/n$，h^Q 是一个定义在方体 Q 上的函数,若 $0\le\gamma$，则：

$$\left\|\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\gamma/n}}\int_Q|h^Q|\right\|_q\le C\left\|\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\gamma/n+\alpha/n}}\int_Q|h^Q|\right\|_p,$$

其中 C 仅依赖于 p,q,α 和 n。

定理1 设

$0<\beta<1$，$1<r<\infty$，$1<p_j<q<\infty (j=1,2,\cdots,m)$，

$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\alpha/n$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=(\alpha+\beta)/n$，

若$b_i\in\Lambda_\beta(R^n)(i=1,2,\cdots,m)$，则$\left\|[\prod\vec{b},I_{\alpha,m}](\vec{f})\right\|_{\dot{\Lambda}_{m\beta-n/q}}$

$$\le C\prod_{i=1}^{m}\|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)}\|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)}\cdots\|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

证明：若$c>0$，对任意固定且以x_Q为中心，2L为边长的方体Q，cQ表示与Q同中心且边长是Q边长c倍的方体，记$Q_k=2^kQ$，若$f_i\in L^{p_i}$，令$\vec{f}^{\,0}=\vec{f}\chi_{2Q}$，$\vec{f}^{\,\infty}=\vec{f}-\vec{f}\chi_{2Q}$.

容易验证，$[\prod\vec{b},I_{\alpha,m}]=[\prod(b-\vec{b}_Q),I_{\alpha,m}]$，

故$\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\left|[\prod\vec{b},I_{\alpha,m}]\vec{f}(z)-\left([\prod\vec{b},I_{\alpha,m}]\vec{f}\right)_Q\right|dz$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\Big|[\prod(b-\vec{b}_Q),I_{\alpha,m}]\vec{f}(z)-\left([\prod(b-\vec{b}_Q),I_{\alpha,m}]\vec{f}\right)_Q\Big|dz$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\Big|[\prod(b-\vec{b}_Q),I_{\alpha,m}]\vec{f}(z)-I_{\alpha,m}\left(\prod(b-\vec{b}_Q)\vec{f}^{\,\infty}\right)(x_Q)\Big|dz$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\left|\coprod_{i=1}^{m}(b_i(z)-b_Q)I_{\alpha,m}\vec{f}(z)\right|dz$$

$$+C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\left|I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q))\vec{f}^{\,0}(z)\right|dz$$

$$+C\frac{1}{|Q|^{\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\sup_{y\in Q}\Big|I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q)\vec{f}^{\,\infty})(y)-I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q)\vec{f}^{\,\infty})(x_Q)\Big|$$

$$=D_1+D_2+D_3$$

首先估计D_1，运用引理1和$I_{\alpha,m}$在乘积Lebesgue空间上的有界性可得，

$$D_1=\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\left|\coprod_{i=1}^{m}(b_i(z)-b_Q)I_{\alpha,m}\vec{f}(z)\right|dz$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\coprod_{i=1}^{m}\sup_{y\in Q}|b_i(y)-b_Q|\int_Q\left|I_{\alpha,m}\vec{f}(z)\right|dz$$

$$\le C\frac{|Q|^{1-\frac{1}{q}}}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\coprod_{i=1}^{m}\sup_{y\in Q}|b_i(y)-b_Q|\left(\int_Q\left|I_{\alpha,m}\vec{f}(z)\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\prod_{i=1}^{m}\|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)}\times\|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)}\times\cdots\times\|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

然后估计D_2，可得：

$$D_2=C\frac{1}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\int_Q\left|I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q))\vec{f}^{\,0}(z)\right|dz$$

$$\le C\frac{|Q|^{1-\frac{1}{q}}}{|Q|^{1+\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}}\left(\int_Q\left|I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q))\vec{f}^{\,0}(z)\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{\frac{m\beta}{n}}}\prod_{i=1}^{m}\sup_{y\in Q}|b_i(y)-b_Q|\left(\int_Q\left|I_{\alpha,m}\vec{f}^{\,0}(z)\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\prod_{i=1}^{m}\|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)}\times\|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)}\times\cdots\times\|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

最后去估计D_3，

$$\left|I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q)\vec{f}^{\,\infty})(y)-I_{\alpha,m}(\prod(b-\vec{b}_Q)\vec{f}^{\,\infty})(x_Q)\right|$$

$$\le C\int_{R^n}\int_{R^n}\cdots\int_{R^n}\frac{\prod_{i=1}^{m}|y_i-x_Q||(b_i(x)-b_Q)|}{\left(|x_Q-y_1|+|x_Q-y_2|+\cdots+|x_Q-y_m|\right)^{mn-\alpha}}$$

$$\times|f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)|dy_1dy_2\cdots dy_m$$

$$\le C|Q|^{-m+\frac{\alpha}{n}}\sum_{k=2}^{\infty}\int_{Q_{k+1}\setminus Q_k}\int_{Q_{k+1}\setminus Q_k}\cdots\int_{Q_{k+1}\setminus Q_k}|f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_m(y_m)|$$

第 2 卷◆第 9 期◆版本 1.0◆2019 年 9 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

$$\times \prod_{i=1}^{m} \left|(b_i(y_i) - b_{Q_{k+1}}) + (b_{Q_{k+1}} - b_Q)\right| dy_1 dy_2 \cdots dy_m$$

$$\leq C|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{m\beta}{n}} \sum_{k=2}^{\infty} 2^{kn(\frac{m\beta}{n}-\frac{m}{p}-\frac{m}{n}+\frac{\alpha}{n})}$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)} \times \|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)} \times \cdots \times \|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

$$\leq C|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{m\beta}{n}} \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)} \times \|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)} \times \cdots \times \|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

则有：

$$D_3 = C \frac{1}{|Q|^{\frac{m\beta}{n}-\frac{1}{q}}} \sup_{y \in Q} \Big| I_{\alpha,m}(\prod (\vec{b - b_Q}) \vec{f}^{\infty})(y)$$

$$- I_{\alpha,m}(\prod (\vec{b - b_Q}) \vec{f}^{\infty})(x_Q)\Big|$$

$$\leq C \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \|f_1\|_{L^{p_1}(R^n)} \times \|f_2\|_{L^{p_2}(R^n)} \times \cdots \times \|f_m\|_{L^{p_m}(R^n)}$$

因此，定理得证。

[参考文献]

[1]CoifmanRR,MeterY.Oncommutatorsofsingularintegralsandbilinearsingularintegrals[J].TransAmerMathSoc,1975,212:315-313.

[2]CoifmanR,RochbergR,WeissG.FactorizationtheoremsforHardyspacesinseveralvariables[J].Ann.Math,1976,103:611-635.

[3]KenigCE,SteinED.Multilinearestimatesandfractionalintegration[J].Math.Res.Lett,1999,6:1-15.

[4]默会霞,张志英.多线性分数次积分与Lipschitz函数生成的交换子的有界性[J].数学物理学报,2011,31A(5):1447-1458.

[5]DevoreRA,SharpleyRC.Maximalfunctionsmeasuringsmoothness[J].MemoirsOfTheAmericanMathematical,1984,47.

作者简介：

房成龙(1992--),男,汉族,甘肃武威人,硕士,讲师,研究方向：调和分析；从事工作：高校教师工作

基金项目：

新疆自治区自然科学基金资助项目(2016D01C381)；新疆自治区自然科学基金资助项目(2019D01C334)。