教育研究
Education Research
第 3 卷◆第 5 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

两种子空间的性质探讨

闫爽　冯立超
华北理工大学 理学院
DOI:10.32629/er.v3i5.2760

[摘　要] 本文研究了极大子空间和亚子空间的性质,并且给出极大子空间、亚子空间分别与线性子空间之间的关系的证明方法,其主要贡献体现为在研究这两个空间的性质时给出不同于前人的证明方法。
[关键词] 极大子空间；亚子空间；子空间的交

引言

线性子空间是线性代数最基本的数学概念,也是线性代数的主要研究对象,线性子空间的理论和方法对于现代矩阵研究应用极其广泛。近些年,有很多学者对线性子空间及其性质进行了深入的研究：郝成功等[1]提出指数有界性的极大子空间概念；江修保[2]给出亚子空间的基和维数的概念；刘聿琦等[3]给出极大子空间是维数为1维的子空间的余子空间；豆艾等[4]给出任意的线性子空间可以表示成几个极大子空间交的形式；张鑫[5]给出满足降链条件的极大子空间的交都可以用几个极大子空间的交来表示；周燕博等[6,7]给出极大子空间在同构映射下得到的仍为极大子空间；徐中英等[8]给出亚子空间的表示法唯一,徐运阁等[9]等给出关于亚子空间的3个等价条件。

本文以极大子空间和亚子空间的概念为基础,首先,给出极大子空间在维数方面的性质,又给出任意的线性子空间可以表示为几个极大子空间的交的不同证明方法,以及极大子空间在同构映射下得到的仍为极大子空间的不同证明方法;其次,由亚子空间的定义,得到亚子空间的表示方法唯一;另外,给出当亚子空间的构成元素线性无关时,亚子空间一定是线性子空间的不同证明方法。本文的主要贡献为给出极大子空间和亚子空间在维数、映射和表示方法方面的一些结论的不同的证明方法,同时给出一个关于不同亚子空间关系方面的新的结论。

下面我们引入一些定义和引理为后面给出的证明方法做铺垫。

定义1[1]设V是数域F上的线性空间,U是V的子空间,在V任取一个子空间M,若满足$M\supseteq U$,就有$M=V$或者$W=U$,那么W是V的极大子空间(即V的任意一个子空间都包含U,U是V及U的子空间中并且包含在它们之中的最大的子空间)。

注 $M_n(F)$ 是一切n阶矩阵所组成的向量空间,令$M_{ij}=\{A\in M_n(F)\,|$A的第i行第j列元素是0$\}$,那么M_{ij}就是$M_n(F)$的极大子空间。

定义2[2]设V是数域F上的线性空间,在V中的任取s个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,则形式为

$$L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\mid k\in F,\sum_i k_i=k\}$$

的空间(其中k为任意确定的数且$k\in F$)称为线性空间的亚子空间。

注 亚子空间不一定是子空间,如向量$\alpha_i\neq\theta$(其中θ表示零向量),且$k=1$,则$L_1(\alpha_1)=\{\alpha_1\}$当然不是子空间。

定义3[10]设W,W'都是线性空间V的线性子空间,若W'满足$W\oplus W'=V$(即$V=W+W'$且$W\cap W'=\{0\}$),则称W'为W的余子空间。

注 其中“$\oplus$”表示两个空间的直和,参见文献[11]。

引理1[12] V是数域F上的线性空间,$W\subseteq V$且$W\neq V$,任取$\alpha\in V$但$\alpha\notin W$,对于V的极大子空间M,有$\alpha\notin M$,且$M\supseteq W$。

1 极大子空间的性质

在线性空间的研究中,关于有限维线性空间的研究已经很多,但是对于一般线性空间基本没有探讨,下面我们通过对极大子空间在维数和映射上的性质,对一般子空间进行初步探讨。下面定理1-3的结论可参见文献[3-7,12],本文对这些结论给出了不同的证明方法。

定理1 设V是数域F上的n维线性空间,M是V的子空间,那么M是V的极大子空间的充要条件是M是维数为1的线性空间的余子空间。

证明 必要性如果M是V的极大子空间,令$T\in V-M$,$T\neq 0$ $L(T)=\{aT\mid a\in F\}$,有$\dim L(T)=1$,下面只须证明M是$L(T)$的余子空间。

(1)对于$L(T)\cap M$中的任意一个元素a,令$a=a_0T$ $(a_0\in F)$ $(a_0\in F)$,可得$a_0=0$(反之,如果$a_0\neq 0$,则$T=X\mid a_0\in M$,这与$T\in V-M$矛盾),因此由$a=aT=0$,可得$M\cap L(T)=\{0\}$。

(2)令$\alpha_1\in M$,$\alpha_2\in L(T)$,假设$\alpha_1+\alpha_2=0$,当

$$\alpha_1=\alpha_2=0,\ \alpha_1-\alpha_2\in M\cap L(T),$$

因此$M\cap L(T)=\{0\}$,进而$V=M\oplus L(T)$。

充分性 如果M是维数是1的线性空间$L(T)$的余子空间,并且$W\supseteq M$,令$T_1\in W$

且$T_1\notin M$,由假设知$V=L(T)\oplus M$,令

$T_1 = aT - U(a \in F, \ U \in M)$，有 $T = \frac{T_1}{a} - \frac{U}{a}$。因为 $T_1 \in W$，$U \in M$ 且 $M \subseteq W$，所以 $T \in W$，于是 $L(T) \subseteq W$。

又由 $L(T) \oplus M \supset L(T)$，$L(T) \oplus M \supset M$，并且 $L(T)$ 是T最小的子空间，有 $L(T) \oplus M \subseteq W$，从假设中可知 $L(T) \oplus M = V$，则 $W = V$，那么 M 一定是 V 的极大子空间，证毕。

注 该定理已经在文献[3]中给出，文献[3]中通过构造一维线性空间，并对其余子空间进行量性分析，从而给出结论的证明方法；本文通过构造一维的生成子空间，借助直和的性质，从而得到与定理1的不同的证明方法。

推论1 设 V 是维数为 n 的线性空间，M 是 V 的一个子空间，那么 M 为 V 的极大子空间的充分必要条件是 $\dim W = n-1$。

证明 必要性 如果令 M 为 V 的极大子空间，根据定理1的结论，一定有维数是1的线性空间 W，满足 $V = W \oplus M$，再根据维数定理，可得

$$\dim M = \dim V - \dim W = n-1 \quad (1)$$

充分性 如果 $\dim M = n-1$，再假设 W 是 M 一个的余子空间，可得

$$\dim W = \dim V - \dim M = n-(n-1) = 1 \quad (2)$$

那么 M 也是 W 的余子空间，证毕。

注 由该定理，可知极大子空间的维数是确定的。文献[3]并未给出证明，此处利用维数定理以及定理1的结论给出了证明方法。

定理2 假设 V 是线性空间，那么任取 V 的一个子空间 W，它一定可以表示成几个极大子空间的交集。

证明 任取 $W \subset V$，假设 $W = V$，显然 W 不能表示为几个非空的极大子空间的交集，反之，假设 $W \neq V$，在W的补集 W^c 中(即V-W)任取向量T，根据引理1，存在极大子空间 M_T，使得 $T \notin M_T \supseteq W$ 成立。假设 $W_1 = \bigcap_{T \in M_c} M_T$，只须证 $W_1 = W$。

首先，$\forall T \in W$，$W \subseteq M_T$，有 $W \subseteq \bigcap_{T \in M_c} M_T$，可得 $W_1 \subseteq W$；其次，对 $\forall T \in W^c$，$T \notin M_T$，有 $T \in M_T \subseteq \bigcup_{T \in W^c} M_T = (\bigcap_{T \in M_c} M_T)^c = W_1^c$，最后得到 $W_1 \subseteq W$，由此定理结论成立。

注 该定理解释了线性空间V的任意子空间与极大子空间的关系。在文献[4]中，利用反证法给出了证明方法；本文利用引理1 的结论，通过构造极大子空间给出不同的证明方法。

推论2 设 V 是数域F上的线性空间，$M \subset V$，是 V 的极大子空间的充要条件是 M 不能表示为除 M 之外的其他子空间的交。

证明 利用反证法，假设 M 可以表示为其他子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 的交（即 $M = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$），则 $M \subseteq W_i (i = 1,2,\cdots,s)$；又由于M是 V 的极大子空间，有 $M \supset W_i (i = 1,2,\cdots,s)$，与假设矛盾，因而 M 不能表示为 V 中其他子空间的交。

注 由该定理得到，极大子空间也不能表示为线性空间V的其余极大子空间的交。在文献[4]中，利用除极大子空间之外的子空间可以表示为其他子空间的交的结论给出了证明方法；本文利用反证法(即假设可以表示为除之外的其他子空间的交)及极大子空间的定义给出不同的证明方法。

定理3设 V 是数域F线性空间，若 V 的n个子空间满足降链条件(即 $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \cdots \supseteq W_n$)，则 $W_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 这些子空间均可用几个极大子空间的交表示。

证明 令T为 W_1^c（其中为 W_1 的补集，表示为 $V - W_1$）中的任意向量，根据引理1，存在极大子空间 M_T，使得 $T \notin M_T \supseteq W_1$。假设 $K = \bigcap_{T \in W_1^c} M_T$，因为 $W_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 满足降链条件，只须证 $W_1 = K$。由于 $T \in W_1^c$，$T \notin M_T$，有

$$T \in (M_T)^c \subseteq \bigcup_{T \in W_1^c} (M_T)^c = \left(\bigcap_{T \in W_1^c} M_T \right)^c = K^c,$$

因此 $W_1^c \subseteq K^c$，$W_1 \supseteq K$。

下面证明 $W_1 \subseteq K$，由于 $M_T \supseteq W_1$，有 $(M_T)^c \subseteq (W_1)^c$，于是 $W_1^c \supseteq \bigcap (M_T)^c \supseteq (\bigcap M_T)^c$，因此，$W_1 \subseteq \bigcap M_T = K$，则 $W_1 = K$，证毕。

注 定理3实质上是定理2在降链条件下的推广。文献[5]中利用zorn引理[12]给出了证明方法；本文利用定理1 的结论，通过构造极大子空间的交，给出不同的证明方法。

定理4 极大子空间在同构映射的作用下仍为极大子空间。

证明 如果 f：$V_1 \rightarrow V_2$ 是同构映射，其中 M_1 是 V_1 的极大子

空间，由此得到 $f(M_1)\subset V_2$，只须证明 $f(M_1)$ 是 V_2 的极大子空间。

假设 W_2 是 V_2 的极大子空间，有 $V_2\supset f(M_1)$，且 $W_2\supseteq f(M_1)$。

由假设知 f 是同构映射，有 $f^{-1}(W_2)\supseteq M_1$，再由假设知 M_1 是 V_1 的极大子空间（即 $f^{-1}(W_2)\subseteq M_1$），因此 $f^{-1}(W_2)=M_1$，$W_2=f(M_1)$，由此极大子空间的同构映射也是极大子空间。

注 由该定理可得极大子空间在同构映射下的性质。文献[6,7]利用线性子空间在同构映射下仍为线性子空间的结论以及极大子空间的定义给出了的证明方法；本文利用线性空间的逆映射的性质给出了不同的证明方法。

2 亚子空间的性质

数域 F 上的线性空间 V 的子空间对加法和数乘这两种运算是封闭的，但亚子空间却不一定，下面对亚子空间的表示方法进行探讨，对亚子空间与线性子空间的关系给出证明。下述亚子空间的表达唯一性定理(定理5)、关于亚子空间的3个等价条件(定理6)的结论虽已给出，但本文基于已有结论给出不同的证明方法；同时定理7对不同亚子空间的关系方面给出了一个新的结论及证明方法。

定理5 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则亚子空间

$L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,\ k\in F,\sum_i k_i=k\}$

中各元素的表示方法唯一。

证明 $\forall\alpha\in L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，假设存在两组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 和 $l_1,l_2,\cdots,l_s$ 且 $\sum_i k_i=\sum_i l_i=k$，其中 $k_i,l_i\in F(i=1,2,\cdots,\ s)$，使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \quad (3)$$

$$\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s \quad (4)$$

两式相减，得到

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s-l_s)\alpha_s=\theta \quad (5)$$

（其中 θ 是零向量），由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_s=l_s$，即表示法唯一。

注 在文献[8]中，利用向量线性无关的等价条件对定理5给出了证明方法；本文是从亚子空间的定义出发，利用亚子空间中的各元素的线性形式构造零向量的结论给出不同的证明方法。

定理6 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，对于亚子空间 $W=L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则下列说法等价：(1) $k=0$；(2)W为子空间；(3) $\theta\in W$（是零向量）。

证明 以下证明过程是由 $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$. 已知是亚子空间，$\forall\alpha,\beta\in V$，任取 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in F$，且 $\sum_i k_i=k=0$，使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \quad (6)$$

任取 $l_1,l_2,\cdots,l_s\in F$，且 $\sum_i l_i=k=0$，使得

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s \quad (7)$$

则 $\sum_i(k_i+l_i)=0$，那么

$$\alpha+\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s+l_s)\alpha_s\in W \quad (8)$$

任取 $p\in F$，有 $p\alpha=p\sum_i k_i\alpha_i\in W$，得到(1) $\Rightarrow$ (2)；

由 W 是亚子空间，令

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,-\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s \quad (9)$$

（其中 $\sum_i k_i=\sum_i l_i=k$），则

$$\theta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s+l_s)\alpha_s\in W \quad (10)$$

得到(2) $\Rightarrow$ (3)；

假设 $\theta\in W$，则存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in E$ 且使得

$$\theta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \quad (11)$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，即 $\sum_i k_i=0$，得到 $(3)\Rightarrow(1)$，证毕。

如果 $k=0$ $L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，必为线性子空间，但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 相关性不确定。

如 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,2,-1),\alpha_3=(3,-1,4)$，可以得到

第 3 卷◆第 5 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$L_0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为线性子空间，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

注 在文献[9]中，利用亚子空间的表示法唯一，以及向量线性无关的充要条件给出了证明方法；本文利用线性子空间及亚子空间的定义给出的新的证明方法。

推论3 对于亚子空间

$$L_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k\in F,\sum_i k_i=k\} \quad (12)$$

若 $k\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一定线性相关。

证明 假设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in F$ 且 $\sum_i k_i=k\neq 0$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \quad (13)$$

$$\alpha_s=-\frac{k_1}{k_s}\alpha_1-\frac{k_2}{k_s}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} \quad (14)$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以相互线性表示，证毕。

注 在文献[9]中，利用推论3的等价条件（若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $k=0$）的结论给出了证明方法；本文利用向量线性相关的充要条件给出不同的证明方法。

定理7 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，W_1，W_2 均为亚子空间，且有 $W_1=L_k(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ ，$=L_m(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ ，则 $W_1=W_2$ 的充分必要条件是 $k=m=0$。

证明 必要性因为 W_1，W_2 均为亚子空间，有 $\sum_i k_i=k,\sum_i l_i=m$，令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0 \quad (15)$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，有

$k_1=k_2=\cdots=k_s=0,\ \ l_1=l_2=\cdots=l_m=0$，则 $k=m=0$。

充分性 由亚子空间的定义可以推知 $W_1=W_2$，证毕。

注 在文献[9]中，只给出亚子空间在表示法方面的结论的证明方法，但定理7利用亚子空间的定义对不同亚子空间的关系方面给出了一个新的结论及其证明方法。

3 结论

通过给出极大子空间和亚子空间的定义，本文对其性质进行拓广，这些为更深层次地挖掘线性空间提供了方便。对于我们在学习阶段熟悉的线性子空间，本文以基和维数、直和、子空间的交的性质为基础，给出极大子空间、亚子空间与线性子空间的关系的证明方法，极大丰富线性空间的研究领域，大大提高线性子空间的解决问题的应用实践性。由此，线性子空间的研究成果逐渐趋于完备，使得它在数学理论中占据着极其重要的地位。与此同时，这两类子空间在其他方面的性质研究将进一步开展。

[参考文献]

[1]郝成功,王建婷.极大子群为广义四元数群的有限 2-群[J].山西大学学报(自然科学版),2017,40(4):732-735.

[2]江修保.子空间学习的若干问题研究及其应用[D].华中科技大学,2016.

[3]刘聿琦,刘海艳,冷静.有限维线性空间上的极大线性变换群在几个线性空间上的群作用[J].大学数学,2019,35(5):1-4.

[4]豆艾,李璞金.极大子群都同构且类二的有限群[J].山西师范大学学报(自然科学版),2019,33(2):6-9.

[5]张鑫.基于线性子空间逼近的统一线性降维[D].北京工业大学,2018.

[6]周燕博,刘建军.极大子群都同构的有限 p-群[J].西南师范大学学报(自然科学版),2018,43(12):26-29.

[7]缪龙,陈龙,赵瑜,等.关于 p-可解群的二极大子群[J].西北大学学报(自然科学版),2020,50(2):261-264.

[8]徐中英,高迎彬,孔祥玉,等.基于 Rayleigh 商的次子空间准则跟踪函数[J].通信学报,2019,40(11):38-44.

[9]徐运阁,曾祥勇.关于线性子空间与仿射子空间的标记[J].大学数学,2018,34(4):68-72.

[10]张立卓.关于线性子空间基的一种求解方法[J].大学数学,2016,32(4):107-111.

[11]徐运阁,曾祥勇.线性子空间的直和与直积[J].大学数学,2019,35(1):65-69.

[12]张兴军,吴莉,王学平.交换半环上半线性空间的线性变换[J].四川师范大学学报(自然科学版),2020,43(2):181-186.

作者简介：

闫爽(1995--),女,汉族,河北唐山人,理学硕士,研究方向：应用数学。

冯立超(1986--),男,汉族,河北唐山人,理学博士,副教授,硕士生导师,研究方向：应用数学。

基金项目：河北省高等学校科学研究项目(No. QN2017116),唐山市科学技术研究与发展计划项目(No.19130222g),华北理工大学研究生教育教学改革项目(No.J1905)