第 3 卷◆第 7 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

论公理化思想与中学数学教育

陈先康
六盘水师范学院(数学与计算机科学学院)
DOI:10.32629/er.v3i7.2970

[摘　要] 公理化思想来源于几何学,是研究数学的重要方法,其从尽可能少的基本概念和不证自明的公理出发,通过纯逻辑推理,把一门学科建立成为演绎系统。另一方面,新课改下,中学数学教育更注重逻辑思维能力和创新性正是公理化思想的核心和精华。所以,在中学数学教学中讲授公理化思想是必要且可行的。本文将从公理化思想在减负政策推行和逻辑思维能力培养中的积极作用出发,阐述公理化思想在中学数学教育中不可或缺的重要地位。
[关键词] 公理化思想；中学数学教育；减负；逻辑思维能力

引言

公理化思想是从一组不加证明的命题、公理和尽可能少的、不加定义的原始概念出发,运用严格的逻辑推理,推导出科学系统中的其他命题(定理)。应用公理化思想建立演绎系统的关键在于引进尽可能少的基本概念和公理,运用这些基本概念和公理推导出新的定理和命题。公理化思想主要是由这些原始概念、基本公理和推导出的定理和命题构成的[1]。此外,作为数学学科中主要的思想之一,公理化思想的教学和应用不仅是掌握数学相关知识的关键也是研究其他自然科学的重要方法。

公理化思想最早出现在几何学中,随后在教育界也颇具影响力,其中二十世纪三十年代后期出现的尼古拉布尔巴基学派[2]最具代表性,该学派的研究成果和数学思想不仅引起数学界的广泛关注也引起了教育界的共鸣。其核心是用公理化方法抽象数学理论对数学进行分类。采用其思想,将建立在抽象集合的当今数学分为三大类：序结构、代数结构、拓扑结构[3]。它们被统称为“母结构”,每一个“母结构”是由具有某种特征的集合构成的子结构组成的。进一步,数学系统就是由这些具有一定特征的集合所组成的一种系统。譬如,群、环及域组成了代数系统以及代数系统的子系统。现代数学的研究内容中重要的一部分就是研究这些数学系统,找出各个数学系统的联系和差别。由此可知,由公理化思想下孕育出的数学结构系统在数学的研究和发展中发挥了至关重要的作用。此外,此学派数学结构化思想的出现也深深影响了中学数学教育模式。二十世纪七十年代美国兴起的中学教学新数学运动就是一个典型例子,此次运动对我国中小学教育体制改革也产生了深远影响。

公理化思想属于纯逻辑推理过程,它对人类逻辑思维能力的形成和发展有强大的推动作用。本文将从公理化思想在减负政策推行和学生逻辑思维能力培养中的作用出发,通过教学实例来阐明公理化思想对中学数学教育的重要性和必要性。

1 公理化思想在减负政策推行中的作用

自2005年《关于切实减轻中小学生过重课业负担的若干意见》政策被提出以来,中学的数学教育呈现出“减负相当于减去一个负数”的奇怪现象。大多数中学学生和教师并没有因为减负而从繁重的功课和工作中解脱出来,反而因为减负阶段的放松而必须缩短课外时间进行补习。这似乎和国家关于减负政策的初衷大相径庭,特别是对于初高中三年级学生,因之前的松懈而不得不在最后阶段负重前行。因此,如果想跳出怪圈做到真正的减负,中学的数学教育就必须改变“题海战术”“死记硬背”等费事低效的方法。纵观公理化思想的内容,其本质是尽可能少的概念、公理,其思想特点就是简单。所以,把公理化思想应用到中学数学教育,注重在基本概念和公理基础上的推导过程,将大大减轻学生和老师的工作量真正做到高时高效,实现减负目的。

比如,高中数学中关于“数列求和方法”的讲授。很多资料和教师教授此知识点时,会将数列求和方法分为：求和公式、首尾相加求和、错位相减求和、分组求和及裂项相消求和这五种方法。实际教学中发现,学生通过死记硬背和重复练习,对等差、等比数列的相关知识掌握较为娴熟,但这五种方法往往因为记忆不准确、区分不明确等问题而不知如何运用。相反地,教师教学研究中,如果能运用公理化思想,化繁为简,注重结构化,将首尾相加、错位相减求和方法融入到等差、等比数列求和公式推导中。同时,将分组及裂项相消求和归纳到求和公式应用中。这样既减轻了学习任务又提高了学习效率。

2 公理化思想在思维逻辑培养中的作用

日本数学家米山国藏曾说:“作为知识的数学出校门不到两年就忘了,唯有深深铭记在头脑中的数学的精神、数学的思想、研究的方法和着眼点等这些随时随地地发生作用,使人终身受益”[4]。学校培养人才的重点不在于传授内容而在于思维逻辑的培养。人才不应该仅仅是知识的容器,更应该是知识的传承者和发扬者。所以,这就要求教师在授课过程中秉持“授之以鱼不如授之以渔”的思想,注重数学思想和方法的传授。公理

化作为数学学科的重要思想方法之一，其分析、抽象数学知识的能力对于培养学生举一反三、融会贯通的逻辑思维能力具有重要作用。在中学数学学习阶段，学生解题时不懂利用所学的数学思想而往往按照经验去解决问题，这种知其然不知其所以然的方式往往使得很多学生在遇到创新拓展类题型时而不知所措。如果教师在教学过程中为学生普及公理化思想方法，就可以帮助学生抽象知识点本质进而运用到解题过程中。本篇论文将通过举例论证说明公理化思想在逻辑思维能力培养中关于整合知识、分析问题和解决问题三方面的作用。

2.1纵观整体，抓住本质。中小学数学教育看似没有直接联系，但纵观其内容不难发现：中小学数学教育的知识点是属于同一结构下的推广。例如，中学的复数域是小学有理数域的推广；中学的一元一次和一元二次方程的求解实质上是小学求未知量的推广；中学的平面几何和立体几何与小学几何图形是一个体系的。所以，中学数学教育实质上是小学数学教育一般化、复杂化。所以，数学教育中渗透公理化思想将有助于学生纵观全局、对比分析、抓住本质、解决问题。

例1：设函数 $f(x)=\log_2^x$ 则 $f(x)<3$ 成立的 x 的取值范围为？

此题 $f(x)$ 虽是显示表达，但此题并不是一元一次方程也不是一元二次方程。所以，解这两种方程的方法并不适用于此题[5]。对此，运用公理化思想，从已学的一元一次和一元二次不等式求解过程中总结异同建立此类问题的一般规律。通过大量求解一元一次和一元二次不等式，不难发现不等式的求解首先是求其对应方程的根，这种特点在一元二次不等式求解中特别突出；然后应用口诀写出解集。而一元一次不等式与一元二次不等式求解的最大区别在于口诀。进而，我们可以大胆猜测，所有不等式求解问题都需要先求其对应方程的根，然后根据所求函数特点确定不等式的解集。另外，通过函数相关知识的学习，发现各类函数之间的差别可由其函数图像清晰地表达出来。综上，一般形式不等式求解的关键在于确定函数的图像，这就是数学思想中数形结合的方法。对于例1，首先确定的 $f(x)=3$ 根为 $x=8$。然后，由函数 $f(x)=\log_2^x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数可得不等式的解集为：$\{x\mid 0<x<2\}$。由此可见，公理化思想不仅在系统化数学知识方面具有显著效果而且对学生的潜移默化、举一反三能力有明显的提升。

2.2层层深入，抽丝剥茧。公理化思想在中学数学教育中不仅表现在结构化数学知识，还表现在分析问题、解决问题方面，即数学中常用的分析法：要证明结论1，只要证明结论2；若想证明结论2，只要证明结论3，......只要证明结论 n，根据结论 n 的正确性已知或显然成立，从而推出结论1的正确性。分析法的本质也是公理化思想，其主要表现为：公理化思想既能还原数学本质，追求问题本源又能培养学生积极探索的良好习惯。

例2：已知

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha,\ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$ 的值为？

利用分析法解此题：首先由

$$\frac{\cos2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

可知，如果想求此题，必须求出 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$；如果想知 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$，必须找到他们之间的关系。由

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha,\ \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

和 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 可得：

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}-1}{4},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

进而逆推可得：$\dfrac{\cos2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$。

2.3以退为进，化繁为简

分析法是解决数学问题的常用方法，但其要求学生有较高的数学素养以及较强的逻辑能力。而在某些数学问题中，我们并不需要一溯到底，只需要“退一步，再退一步......”即以退为进，化繁为简。比如，习题教学中，教师引导学生解决问题时应多问“如果得不到这样的结果，那么可以得到怎样的结果，他们两者之间有怎样的联系”从而以退为进解决实际问题，引导学生一题多解。另外，教师还可将复杂的问题退回到特殊情形(简单模型)，由简单模型开始研究题目本质特点和难点，层层深入。这样的思维锻炼方法不仅可以帮助学生掌握知识还能帮助学生深入思考达到一题多解、一题多变的效果。

例3：设函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$，则 $f(x)>3$ 成立的 x 的解集为？

对于例3，直接求解显然比较麻烦，这时，不妨退一步先求 $\dfrac{t+1}{t-1}<3$ $(t>0)$ 的解集：$\{t\mid 1<t<2\}$；再求出 $1<2^x<2$ 的解集：$\{x\mid 0<x<1\}$。

3 总结

数学公理化思想是前辈留给我们的宝贵财富，我们要站在巨人的肩膀上学习数学知识。但由于公理化思想的抽象性，需要教师在教学中逐步引导、慢慢渗入，帮助学生了解、运用公理化思想。一方面，应用公理化思想结构化零散知识；另一方面，应用公理化思想，创设情境，培养学生主动探索、举一反三能力。

[参考文献]

[1]毛耀忠,许尔伟.公理化方法的发展及其对数学教育的启示[J].当代教育论坛(教学研究),2010(07):34-35.

[2]胡作玄.布尔巴基学派的兴衰[M].上海:知识出版社,1984.

[3]张禾瑞.近世代数基础[M].北京:人民教育出版社,1978.

[4]米山国藏.数学的精神、思想和方法[M].成都:四川教育出版社,1986.

[5]任念兵.“一元二次方程根的个数”之我见[J].中学数学教学参考,2015(31):65-67.

作者简介：

陈先康(1992--),男,苗族,贵州遵义人,教师/助教,硕士研究生,六盘水师范学院(数学与计算机科学学院),研究方向：运筹学(排队论)。