Education Research

教育研究
第 3 卷◆第 10 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

关于线性映射$\phi(X)=AX-XB$的几个结果及其应用

汪皎月
凯里学院理学院
DOI:10.12238/er.v3i10.3273

[摘　要] 本文是在前人对矩阵方程 $AX = XB$ 解的判定和解的结构的研究基础上,做出了线性映射 $\phi(X) = AX - XB$ 的相关讨论,并给出了相应的应用.
[关键词] 矩阵方程；特征值；线性映射
中图分类号：O122.2　文献标识码：A

Some results about the linear mapping $\phi(X)=AX-XB$ and its applications

Jiaoyue Wang
Carey College Faculty of Science
[Abstract] Based on the determination and struction of solution of matrix equation $AX = XB$, the discussion and the corresponding application of the linear mapping $\phi(X) = AX - XB$ is given.
[Key words] matrix equation; eigenvalue; linear mapping

引言

矩阵方程 $AX = XB$ 在系统控制和数值计算方法经常遇到,前人应用矩阵的标准型、矩阵的分块理论对矩阵方程 $AX=XB$ 的研究在理论上给出了非零解的条件以及有非零解时解的维数；引入Kroncker积将矩阵方程 $AX=XB$ 转化为等价的线性方程组[4]

$$\left(A\otimes I_n - I_n\otimes B^T\right)\overline{X}=0$$

给出了其数值解；本文在此基础上引入线性映射 $\phi\left(X\right)=AX-XB$，在矩阵空间讨论 $\phi\left(X\right)=AX-XB$ 的特征值,核与值域的维数,以及 ϕ 可对角化的条件并给出相应的应用.

1 预备知识

引理1[1](凯莱定理)设 A 是数域 P 上的一个 $n\times n$ 矩阵 $f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|$，是 A 的特征多项式,则 $f(A)=0$.

引理2[2] n 阶方阵 A,B 没有公共特征值,证明：矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

证明由 $AX=XB$，则

$A^2X=A(AX)=(AX)B=XB^2$，

由数学归纳法有 $A^mX=XB^m\left(m\in N\right)$

设 $f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|$，由引理1知 $f(A)=0$，再由上述式子有 $f(A)X=Xf(B)$，即 $Xf(B)=0$，又 $f(B)$ 可逆,故 $X=0$.

引理3 A,B 为 n 阶方阵设 A 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots\lambda_n$，$B$ 有特征值 $\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots\mu_n$，则 $AX=XB$ 的解的情况如下：

(1)当 $\lambda_i\neq\mu_j(1\le i,j\le n)$ 时方程 $AX=XB$ 只有零解.

(2)当 $\lambda_i=\mu_j(1\le i,j\le n)$ 时方程 $AX=XB$ 有非零解.

(3)当 X 的秩为 r 时方程 A,B 有 r 个相同的特征值(特征值按重数记).

证明：(1)记

$PXQ=C,PAP^{-1}=\overline{A},Q^{-1}BQ=\overline{B}$，

即有 $\overline{A}C=C\overline{B}$，对每一个若当块有 $J_i(\lambda_i)C=CJ_j(u_j)$，$C$ 的每一小块仍记为 C，此时 C 为 $i\times j$ 矩阵, $\lambda_i\neq u_j$ 时由引理2知 C=0, 得证.

(2) $\lambda_i = u_j$ 时，令 $C=\left(c_{i,j}\right)_{i\times j}$，讨论 $i=j$ 的情形，

$J_i(0)C = CJ_i(0) \Leftrightarrow c_{i,j} = c_{i+1,j+!}$;

$c_{i,1} = c_{k,j} = 0, i \neq 1; j \neq m$

此时得C的通解为

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & c_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}$$

$c_0, c_1, c_2 \cdots c_{i-1}$ 可以任意取值. 故 $AX = XB$ 有非零解.

(3) $R(X) = r, AX = XB$ 时，存在可逆矩阵 P,Q 使得

$PXQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $\overline{A} = PAP^{-1}$, $\overline{B} = Q^{-1}BQ$，则有

$(PAP^{-1})\cdot(PXQ) = (PXQ)\cdot(Q^{-1}BQ)$,

即 $\overline{A}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{B}$.

令 $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$,

则有 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

即 $A_1 = B_1$，$A_3 = 0, B_2 = 0$，

即 A，B 有个 r 阶块是一样的.

推论[3] $AX = XB$ 有非零解的充分必要条件是 A,B 至少有一个共同的特征值.

引理4[4]设 A 的初等因子是 $\{(\lambda-\lambda_i)^{p_i} \mid i=1,\cdots\cdots,m\}$，$B$ 的初等因子是 $\{(\lambda-\mu_j)^{q_j} \mid j=1,\cdots,k\}$，则方程 $AX - XB = 0$ 的线性无关的解的个数是 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij}$，这里 d_{ij} 表示 $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ 和 $(\lambda-\mu_j)^{q_j}$ 的最大公因式次数，即当 $\lambda_i = \mu_j$ 时 $d_{ij} = \min\{p_i, q_j\}$.

2 主要结果及应用

定理1 设 $A,B \in M_n(C)$，$M_n(C)$ 为全体 $n\times n$ 矩阵构成的线性空间，A 的全体特征值为 λ_1，$\lambda_2\ldots\ldots,\lambda_n$，$B$ 的全体特征值为 $\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots\mu_n$，线性映射 ϕ：$M_n(C) \to M_n(C)$ 定义为，$\phi(X) = AX - XB$ 则有

(1) ϕ 的特征值全在集合 $\left\{\lambda_i - \mu_j (1 \le i, j \le n)\right\}$ 中.

(2) ϕ 的全体特征值恰为 $\lambda_i - \mu_j (1 \le i, j \le n)$.

证明 (1) 假设 $\phi(X) = \eta X$，η 为 ϕ 的特征值，即 $(A-\eta E)X = XB$ 有非零解，由引理3即矩阵有公共特征值，$\therefore \lambda_i - \eta = \mu_j$，即有 $\eta = \lambda_i - \mu_j$ 成立.

(2) 由 (1) 知 ϕ 的特征值全在集合 $\left\{\lambda_i - \mu_j (1 \le i, j \le n)\right\}$ 中，下证对任意的 $\xi = \lambda_i - u_j$，都有 $\phi(X) = \xi X$，且 X 非零，即能找到这样的特征向量使得上式成立.

由

$\phi(X) = AX - XB = \xi X = (\lambda_i - u_j)X$，即证 $(A-\lambda_i E)X = X(B-\mu_j E)$ 有非零解.

由引理4知解空间非零，即存在特征向量 X 使得 $\phi(X) = \xi X$ 成立.

定理2线性映射 ϕ：$M_n(C) \to M_n(C)$ 定义 $\phi(X) = AX - XB$，则 ϕ 可以相似对角化的充分必要条件是 A，B 可以相似对角化.

证明由定理1知 ϕ 的特征值 $\eta = \lambda_i - \mu_j (1 \le i, j \le n)$，对某固定的 i,j，$\lambda_i - u_j$ 特征向量的维数由引理4知为 $d_{ij} = \min\{p_i, q_j\}$，$\lambda_i - u_j$ 的代数重数为 $p_i.q_j$.

ϕ 可以对角化 $\Leftrightarrow d_{ij} = \min\{p_i, q_j\} = p_i \cdot q_j$ 对任意的 i,j 都成立，故对任意的 i,j，总有 $k_i = m_j = 1 \Leftrightarrow A,B$ 的若当块都是一阶的，$\Leftrightarrow A,B$ 可以相似对角化.

即上述定理得证.

定理3 线性映射 ϕ：

$M_n(C) \to M_n(C)$定义为

$\phi(X) = AX - XB$，ϕ 的核与值域的维数公式分别为$\dim \ker \phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} d_{ij}$，

$\dim \mathrm{Im}\,\phi = n^2 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij}$.

证明 $\ker\phi$ 的维数即为线性空间 $\{X \mid AX - XB = 0\}$ 的维数，由引理4知 $\dim\ker\phi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij}$

这里 d_{ij} 表示 $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ 和 $(\lambda-\mu_j)^{q_j}$ 的最大公因式次数.

$\dim\ \ker\phi + \dim\ \mathrm{Im}\,\phi = n^2$ 知 $\dim\ \mathrm{Im}\,\phi = n^2 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij}$. 特别的当 $B = A$ 时，下面得到更为漂亮的结论，此时 ϕ：$M_n(C) \to M_n(C)$ 定义为

$\phi(X) = AX - XA$，$\dim\ \ker\phi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij} \ge d_{ii} = \sum_{i=1}^{m} p_i = n$. 即

$$\dim \mathrm{Im}\,\phi = n^2 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij} \le n^2 - n.$$

当且仅当 $d_{ij} = 0$ 时，等号成立，此时 A 的初等因子 $\{(\lambda-\lambda_i)^{p_i} \mid i = 1,\cdots,m\}$ 两两互素.

[基金项目]

凯里学院校级重点学科(数学)(Kzd2014004)凯里学院自然科学研究专项课题(JS201501)。

[参考文献]

[1]张贤科,许甫华.高等代数学[M].清华大学出版社,1998.

[2]钱吉林.高等代数题解精粹[M].中央民族大学出版社,2002.

[3]李兵,陈静,索文莉.关于型AX=XB矩阵方程的求解方法探讨[J].科技创新导报,2011(01):206.

[4]李乔.矩阵论八讲[M].上海:上海科学技术出版社,1988.

作者简介：

汪皎月(1972--),女,江苏金坛人,教授,主要从事微分方程理论及其应用研究。