极限的求解方法与例题解析

郭晓　张晨晨
南阳职业学院

DOI:10.12238/er.v3i12.3507

[摘　要] 极限是微积分学中一个基本概念,是变量变化的终极状态。微积分学中许多概念的引出和解决都依赖于极限知识。因此极限在微积分学中占有非常重要的地位。本文对函数求极限的几种方法进行了归纳。

[关键词] 极限；无穷小量；洛必达法则
中图分类号：D64　文献标识码：A

引言

极限的思想是近代数学的一种重要思想,其思想方法贯穿于微积分学的始终。可以说微积分学的几乎所有概念都离不开极限。

1 利用极限的描述性定义

极限的描述性定义为:一般的,当自变量 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\text{或}f(x)\to A\left(\text{当}x\to\infty\text{时}\right)$$

运用极限的描述性定义可以写出一些简单的函数极限。

例如1：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 等。

2 利用极限四则运算法则

定理1：设

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则有

$$(1)\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=A\pm B;$$

$$(2)\lim_{x\to x_0}\left[Cf(x)\right]=C\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]=CA(C\text{是常数});$$

$$(3)\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x)=AB;$$

$$(4)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

注意：①上述运算法则对

$x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$

等其他极限过程也成立。

②应用极限运算法则求极限时,必须注意每项极限都存在(对于除法,分母极限不为零)

才能适用。

例如2:

①；$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to1}3x^2+\lim\limits_{x\to1}x=3\times1^2+1=4$

$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-x\right)=3\times1^2-1=2$；

②$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2\right)=3\lim\limits_{x\to1}x^2=3$；

③$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2\cdot2x\right)=\lim\limits_{x\to1}3x^2\cdot\lim\limits_{x\to1}2x=3\times2=6$;

④$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2}{2x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}3x^2}{\lim\limits_{x\to1}2x}=\dfrac{3}{2}.$

3 未定式的极限运算技巧

3.1分子,分母都趋向无穷小,即 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 型,处理方法是：分子,分母因式分解,消零因子。

例如3:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x+1}=2$$

3.2分子,分母都趋向无穷大,即 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型,处理方法是：分子,分母同除分母中自变量的最高次幂。

例如4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

总结公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m<n\left(a_0\neq0,b_0\neq0,m、n\text{为非负整数}\right).\\ \infty & m>n\end{cases}$$

3.3$\left(\dfrac{\text{无理式}}{0}\right)$型,处理方法是：分子分母有理化,消零因子。

例如5:

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

3.4($\infty-\infty$)型,处理方法是：通分,消零因子

例如6:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

4 利用一些常见的重要极限公式。(两个重要极限)

4.1极限Ⅰ：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

一般形式为 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\boxed{}}{\boxed{}}=1$

例如7：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}\cdot m=m.$$

4.2极限Ⅱ：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

一般形式为 $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\boxed{}}\right)^{\boxed{}}=e.$

例如8：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{2}.$$

在 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 式中，令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，可得到极限的另一种形式：$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$

一般形式为 $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e.$

例如9：

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\lim_{2x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=e^{2}.$$

5 利用无穷小量。(无穷小量的性质或等价无穷小量替换)

概念：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量(简称无穷小)，记为

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）.

5.1性质：无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量。

例如10：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$

解：因为 $\sin x$ 是有界函数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0.$

5.2等价无穷小量替换

概念：设

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，

即 α 与 β 为 x 在同一变化过程中的两个无穷小量，若

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小量，记为 $\alpha\backsim$.

当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小量的关系：

$\sin x\backsim x$；$\tan x\backsim x$；$\arcsin x\backsim x$；$\arctan x\backsim x$；$1-\cos x\backsim\dfrac{1}{2}x^2$；$e^x-1\backsim x$；$\ln(1+x)\backsim x$；$\sqrt[n]{1+x}-1\backsim\dfrac{x}{n}$.

例如11：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

解：因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\backsim x$，$1-\cos x\backsim\dfrac{1}{2}x^2$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

6 利用函数连续性求极限。

定理2：设函数 $u=\phi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\phi(x_0)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，则复合函数 $y=f(\phi(x))$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\phi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x))=f(u_0)=f(\phi(x_0)).$

例如12：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

四.利用两个准则。(夹逼准则和单调有界准则)

6.1夹逼准则　若函数 $f(x),g(x),h(x)$ 满足下列条件：

(1)在 x_0 附近(不含 x_0)有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$；

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.$

6.2单调有界准则　单调有界数列必有极限

7 洛必达法则求极限。

定理3：若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$；

(2)在点 x_0 附近(不含 x_0)，$f'(x)$，$F'(x)$ 存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$（$A$ 为有限数或为无穷大），

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A.$

例如13：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\times 3}{\sec^2 5x\times 5}=\frac{3}{5}.$$

在求极限的计算过程中，应注意随时约分化简或者分离出容易求极限的因式，以免越算越繁.另外，在求未定式极限时应善于把罗必塔法则与以前求极限的方法结合起来，使计算简化。

8 结束语

极限的求解方法比较灵活，学生在实际计算时应根据时间情况选择最优的解题方法。

[参考文献]

[1]龚德恩.经济数学基础[M].四川:四川人民出版社,2001.

[2]赵树嫄.经济应用数学基础[M].北京:中国人民大学出版社,2007.

[3]胡秀华.MOORe-smith收敛和极限定义的新方式[J].绥化学院学报,2014,34(2):158-160.

[4]熊金成.点集拓扑讲义[M].北京:高等教育出版社1983.

[5]郭林,王学武,王利珍.数学分析[M].北京:清华大学出版社,2011.

[6]华东师范大学数学系.数学分析(上、下册)[M].3版.北京:高等教育出版,2004.