第 4 卷◆第 5 期◆版本 1.0◆2021 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

单个正态总体均值的区间估计教学设计

宋月　冯海林
西安电子科技大学概率统计系
DOI:10.12238/er.v4i5.3880

[摘　要] 区间估计是《数理统计》中的重要内容,本文从点估计不能分析估计量精度的局限性入手,拓展学生思维的深度和广度,引导学生积极探索别的参数估计方法—区间估计；在寻求均值μ的区间估计的过程中,由引例入手,采用倒推法,一步步分析给出：参数的区间——与参数有关的统计量的区间——找枢轴变量——根据枢轴变量的性质确定区间,最后回过来给出参数的置信区间。“以教师为主导、以学生为主体”引导学生主动学习、思考、拓展,并通过一般到特殊的实际问题案例的分析及应用示范,培养学生用区间估计的思想和方法解决单个正态总体均值估计问题的能力。
[关键词] 置信区间；枢轴量；正态总体
中图分类号：G12　文献标识码：A

Teaching Design of Interval Estimation for Single Normal Total Mean

Yue Song, Hailin Feng
Department of Probabilistic Statistics of Xi'an University of Electronic Science and Technology

[Abstract] Interval estimation is an important part in Mathematical Statistics. This paper starts with the limitation that point estimation cannot analyze the estimation accuracy, expands the depth and breadth of students' thinking, guides students to actively explore other parameter estimation methods−interval estimation. In the process of seeking the mean μ interval estimation, the example starts and gives the confidence interval. "Teachers as the leading and students as the main body" guides students to take the initiative to learn, think, and expand, and through the analysis and application demonstration of special practical problems, cultivates students' ability to solve the single normal overall mean estimation problem with the ideas and methods of interval estimation.
[Key words] confidence interval; pivot volume; normal overall

引言(5 分钟)

参数的点估计方法主要有矩估计和极大似然估计,点估计优点明显,但遗憾的是点估计量无法估算估计的精度,怎么解决此问题呢？

具体用PPT演示:第二章介绍的点估计方法是针对总体的某一未知参数θ,构造θ的统计量$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于某次抽样的结果可以得到样本观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,可以用估计$\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作为$\theta$的一个近似值,即认为$\theta_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$近似为$\theta$。例如,某次考试后,某人随机抽了10人的成绩,用其平均成绩75去估计该次考试的总平均成绩,那么就会产生两个问题:第一,75分的精确性如何？点估计无法回答这个问题,怎么办？该如何解决？第二,如何用数学语言描述“75分的精确性如何”这个问题？为此,需要研究区间估计问题。(板书标题)

简单介绍作出重要贡献的统计学家奈曼(J.Neyman)和皮尔逊(E.Pearson),以及奈曼(J.Neyman)在置信区间估计理论中的开创性工作,向同学们推荐书籍:奈曼——来自生活中的统计学家。随后引入置信区间的概念PPT播放。

1 置信区间的概念(15 分钟)

定义1设总体X的分布函数为$F(x,\theta)$,其中θ为未知参数,对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$,若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的两个统计量

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及

$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足：

$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$$

(黑板上写下这个式子)

则随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 称为参数 θ 的对应于置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，也称 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的对应于置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计。其中 $\hat{\theta}_1$ 称为置信下限，$\hat{\theta}_2$ 称为置信上限。置信区间表示估计结果的精确性，而置信度则表示这一结果的可靠性。

注意：

(1) $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$ 的解释。$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$ 表示随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含未知参数 θ 的概率为 $1-\alpha$。这意味着，当我们对同一个统计问题重复抽取多个样本时，按这些样本观测值所得的许多具体区间 $[\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$ 中，大约有 $100(1-\alpha)\%$ 的区间包含这个未知参数 θ。但对一次抽样所得到的这个具体区间，决不能说"区间 $[\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$ 包含 θ 的概率为 $1-\alpha$"，这是因为 $\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是两个确定的数。从而只有两种情形：要么这个区间包含 θ，要么这个区间不包含 θ。这就是为什么把 $1-\alpha$ 称为置信度(也叫在置信区间的可靠度)的原因。通常取 α 的值小于等于0.1。

(2)置信区间的长度，称 $L=\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 为置信区间的长度，实践中人们总希望置信区间的长度越小越好(区间估计的精度)，置信度 $1-\alpha$ 越大越好，在后面的研究中知道要同时满足这两个要求是不可能的，那么实践中应该如何平衡可靠度与精度的关系？进一步推演置信区间的长度与哪些因素有关系？具体该怎么构造置信下限和置信上限呢？

2 枢轴量法(25 分钟)

引例：一批零件中抽取9个零件，测得其直径(毫米)如下：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_{10}
19.7	20.1	19.8	19.9	20.2	20	19.9	20.2	20.3

设零件直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且已知 $\sigma = 0.21$（毫米)，求这批零件直径均值 μ 的置信度为0.95的置信区间。

分析：要构造均值 μ 的置信下限和置信上限，直观的想想法是从均值 μ 的已知信息出发，由上一章知识知道，均值 μ 的的一个点估计是 $\bar{x}$，那么可以 $\bar{x}$ 从做文章呢？

(PPT)回顾正态总体下的常用统计量的分布。

定理1[1]若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则有：

(1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(2) $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(3) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

(4) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

(5) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(6) $\overline{X}$ 与 S^2 独立

找到(2)

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，结合本例，即

$$\frac{21.01-\mu}{0.21/\sqrt{9}} \sim N(0,1)$$

从而建立下列概率分布关系式：

$$P\{a < \frac{20.01-\mu}{0.21/\sqrt{9}} < b\} = 1-\alpha$$

(幻灯片展示标准正态分布及其上侧分位点)

$$P\{-u_{1-\alpha/2} \le \frac{20.01-\mu}{0.21/\sqrt{9}} \le u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

由不等式

$$-u_{1-\alpha/2} \le \frac{20.01-\mu}{0.21/\sqrt{0}} \le u_{1-\alpha/2}$$

变换得

$$20.01 - u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{0.21}{\sqrt{9}}$$

$$\le \mu \le 20.01 + u_{1-\alpha/2}\frac{0.21}{\sqrt{9}}$$

查表知：当 $\alpha = 0.05$

时，$u_{1-\alpha/2} = 1.96$，

于是随机区间：

$$[20.01-0.14, 20.01+0.14] = [19.87, 20.15]$$

是数学期望 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

通过引例分析分析发现 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 是样本的只含有待估参数的函数，况且其分布已知，与待估参数无关。它在推导正态总体均值置信区间公式中去起着非常重要的作用，给出枢轴量这一概念。那么如何寻找枢轴量呢？

例1：设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，其中 $\theta(\theta>0)$ 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体的额样本，给定 α，求 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解：令 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，由上一章知识知，$\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是 θ 的无偏估计。

因为 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n},0\le x\le\theta$$

考察包括待估参数在内的随机变量 $Z=\dfrac{X_{(n)}}{\theta}$，则它的概率密度函数为：

$$g(z)=nz^{n-1},0\le z\le 1,$$

对给定的 α，可以求出两个常数 $a,b(0<a<b<1)$，满足条件 $P(a<Z<b)=1-\alpha$，

即

$$1-\alpha=\int_a^b nz^{n-1}dz=b^n-a^n$$

也就是

$$P\left(\frac{X_{(n)}}{b}<\theta<\frac{X_{(n)}}{a}\right)=1-\alpha\text{，从而}$$

$\left(\dfrac{X_{(n)}}{b},\dfrac{X_{(n)}}{a}\right)$ 是所求置信区间。

进一步总结归纳置信区间推导的步骤：

(1)寻求待估参数的枢轴量，用符号表示 W；

(2)求出枢轴量 W 的分布；

(3)求满足等式 $P\{a\le W\le b\}=1-\alpha$ 的常数 a 和 b，并提问，a 和 b 是否唯一？如果不唯一该怎么选择？

(4)对 $a\le W\le b$ 进行通解变形，获得待估参数的置信区间。

3 单个正态总体的均值的区间估计(25 分钟)

设 σ^2 已知，求 μ 的置信区间。

把引例1一般化，就可得到 σ^2 已知时，μ 的置信区间。

即要确定

$P\{\hat{\theta}_1\le\mu\le\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$，因为 μ 是常数，直接计算是不可能的，试着寻找一个含 μ 的且分布已知的样本函数。(该函数要求包含 μ、σ^2、样本信息，分布已知且形式简单)

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

建立下列概率分布关系式：

$$P\left\{-u_{1-\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

由不等式

$$-u_{1-\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{1-\alpha/2}$$

变换得

$$\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

于是随机区间：

$$\left(\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

是数学期望 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

4 应用

通过对具体例子说明区间估计的应用方法(一般到特殊)，探讨可靠度和精度的关系。

例2：某车间生产滚珠，从长期实践中知道，滚珠直径 X 可以认为服从正态分布，从某天的产品中随机抽取6个，测得直径为(单位：cm)

14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1

(1)试求该天产品的平均直径 EX 的点估计；

(2)若已知方差为0.06，试求该天平均直径EX的置信区间：α =0.05；α =0.01。

解：(1)由矩法估计得 EX 的点估计值为

$$E\hat{X}=\bar{x}=\frac{1}{6}(14.6+15.1+14.9+14.8+15.2+15.1)=14.95$$

由题设知，得 EX 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

而 $\bar{x}=14.95\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}=0.1$，

α =0.05时，$u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$，

所以，EX 的置信区间为[14.754,15.146]。

α =0.05时，

$u_{1-\alpha/2}=u_{0.995}=2.58$，所以，$EX$ 的置信区间为[14.692,15.208]。

从该题可以看出置信水平提高，置信区间扩大，估计精确度降低。

5 单个正态总体的均值的区间估计(12 分钟)

设 σ^2 未知，求 μ 的置信区间。

让学生讨论寻找枢轴量(2分钟)，引导学生思考 σ^2，未知，能够用其无偏估计量 S^2 代替，此时 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\to\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，

$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 是枢轴量吗，回忆定理1，它的分布已知，满足枢轴量的要求，进而仿照 σ^2 已知类似的方法，推到得到相应的置信区间：

$$\left(\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

实际应用中，用样本数据求 $\overline{X}$，S，查表得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)$，代入上述公式就可以得到相应的待估参数的置信区间。

6 影响置信区间精度的探讨(5 分钟)

由上述推到得到的置信区间公式可得置信区间的长度为：

σ^2 已知时，$L=2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

σ^2 未知时，

$$L=2t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

它与置信度和样本容量有关，显然样本容量一定的条件下置信长度与置信度成正比；置信度相同的条件下，置信区间的长度与样本容量成反比。在样本容量一定的前提下，要同时满足可靠度和精度是不可能的。给定置信度的情况下，由上述公式可以计算出满足精度要求的最低的样本容量。

7 结语(3 分钟)

最后用三分钟时间总结本节课的学习的知识要点：置信区间与置信度的概念；枢轴量法的基本步骤；回顾正态总体方差 σ^2 已知和未知时 μ 的区间估计公式。随后进行课后延伸：枢轴变量法可否应用于 σ^2 的区间估计中？怎么构造枢轴变量？简单介绍置信区间在生活中的应用，并列举供学生阅读的相关文献。

[参考文献]

[1]王勇,田波平.概率论与数理统计(第二版)[M].科学出版社,2005.

[2]贾玉心.概率论与数理统计(第二版)[M].北京邮电大学出版社,2005.

[3]茆诗松,周纪芗.概率论与数理统计(第二版)[M].中国统计出版社,2000.