Education Research
教育研究
第4卷◆第5期◆版本 1.0◆2021年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

浅谈曲线上的动点到直线的距离问题

苏增祥
河北隆尧一中
DOI:10.12238/er.v4i5.3881

[摘　要] 课程标准明确指出,“数学教学要紧密联系学生的生活实际,从学生的生活经验和已有知识出发,创设生动有趣的情境,引导学生开展观察、操作、猜想、推理、交流等活动”。大量的教学实践也表明,当学习材料来源于现实生活时,学生的数学学习会表现出更高的兴趣与热情,思维活动也显得更为主动和富有创造性。
[关键词] 曲线上的动点；直线；距离；问题
中图分类号：G11　文献标识码：A

Discussion about the Distance of the Moving Point to the Straight Line on the Curve

Zengxiang Su
Hebei Longyao No.1 Middle School

[Abstract] The curriculum standards clearly point out that "mathematics teaching should be closely linked with the actual students' life, start from the students' life experience and existing knowledge, create vivid and interesting situations, and guide the students to carry out observation, operation, conjecture, reasoning, communication and other activities". A large number of teaching practices also show that when learning materials come from real life, students show higher interest in mathematics and enthusiasm, and thinking activities appear more active and creative.
[Key words] movement on the curve; straight line; distance; problem

引言

直线和圆锥曲线的位置关系问题始终是高中数学的重要组成部分,也是历年高考所青睐的知识点1,而且形式多样,常考常新。它能形象地体现数形结合思想在解析几何中的应用,有利于培养学生的形象思维和逻辑思维2,提高基本运算能力和对数学实质的认识3。现以“曲线上的动点到直线的距离问题”为例,谈谈自己的一点体会。

1 直线和圆上动点的距离的最值

设圆心为C(a,b),半径为r,圆上的动点P到直线L的距离为d,圆心到直线L的距离为d'。则$d_{max}=d'+r$, $d_{min}=d'-r$。

例1．圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$上的点到直线$x-y=2$的距离的最大值是(　　)

A. 2　　B. $1+\sqrt{2}$

C. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $1+2\sqrt{2}$

[解析]思路一：设P(x,y)为圆上任意一点，则点P到已知直线的距离d=$\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$，由已知得圆的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha+1\\ y=\sin\alpha+1\end{cases}$（$\alpha$为参数),将其代入上式得d=$\frac{|\cos\alpha-\sin\alpha-2|}{\sqrt{2}}$=$\frac{\left|\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|}{\sqrt{2}}$，∵ −1 ≤ $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$,∴ $\left|\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|\leq\sqrt{2}+2$，从而$\frac{\left|\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|}{\sqrt{2}}\leq 1+\sqrt{2}$．所以,圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$上

的点到直线 $x-y=2$ 的距离最大值为 $1+\sqrt{2}$，故选B.

思路二：设圆心到直线L的距离为 d'，由已知得 $d'=\frac{|1\times1-1\times1-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，圆上的动点P到直线L的距离为d，则 $d_{\min}=d'-r=1+\sqrt{2}$.

变式：设点P为圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的动点，求 $|x-y-2|$ 的最值.

2 直线和圆锥曲线上动点的距离的最值：

例2. 已知椭圆 $x^2+8y^2=8$，在椭圆上求一点P，使P到直线l：x-y+4=0的距离最小，并求出最小值.

[解1]方程思想：设与直线x-y+4=0平行且与椭圆相切的直线的方程为x-y+a=0，

则由 $\begin{cases}x^2+8y^2=8,\\x-y+a=0,\end{cases}$ 消去y，整理得 $9x^2+16tx+8t^2-8=0$，

则

$$\Delta=16t^2-4\times9\times8(t^2-1)=0,$$

解得a=3，或a=-3.

易知t=-3不和题意，舍去，

故符合题意的切线方程为x-y+3=0，

最小距离为 $d=\frac{|4-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $\begin{cases}x^2+8y^2=8,\\x-y+3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{8}{3},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$

即 $P\left(-\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$.

[解2]转化思想（三角代换）：把 $x^2+8y^2=8$ 化成标准方程得 $\frac{x^2}{8}+y^2=1$，其参数方程为

$$\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}(\theta\text{为参数}),$$

则P到直线l:x-y+4=0的距离为

$$d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta+4|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|3\cos(\theta+\varphi)+4|}{\sqrt{2}},\ (\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{4}),$$

当 $\cos(\theta+\varphi)=-1$ 时，

d的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时，

$$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3},\sin\varphi=\frac{1}{3},$$

从而 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3},\sin\theta=\frac{1}{3}$，得

$\begin{cases}x=-\frac{8}{3},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$ 即 $P\left(-\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$.

[解3]利用导数：对 $x^2+8y^2=8$ 两边求导得 $2x+16yy'=0$，

令 $y'=1$，得 $x=-8y$，代入 $x^2+8y^2=8$ 的 $y=\pm\frac{1}{3}$，

从而P的坐标为 $\left(-\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$，或 $\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

由

$$\frac{\left|-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\left|\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

可知d的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时，点P的坐标为 $\left(-\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$.

变式：(1)点 P 在椭圆 $7x^2+4y^2=28$ 上，则点 P 到直线 $3x-2y-16=0$ 的距离的最大值为________________.

变式：(2)点在椭圆 $7x^2+4y^2=28$ 上，点 P 到直线 $3x-2y+m=0$ 的距离的最小值为 $\frac{8\sqrt{13}}{13}$，则 $m=$______.

[参考答案](1) $\frac{24\sqrt{13}}{13}$，(2)-28.

例3. 已知抛物线 $y=x^2$，直线x－y－2＝0，求抛物线上的点到直线的最短距离.

[解1]根据题意可知与直线x－y－2＝0平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线，对应的切点到直线x－y－2＝0的距离最短，设切点坐标为(x0, x02)，则 $y'|_{x=x0}=2x0=1$，

所以 $x_0=\frac{1}{2}$，

所以切点坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，

切点到直线x－y－2＝0的距离

$d=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$,

所以抛物线上的点到直线x－y－2＝0的最短距离为$\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

[解2]设点P(x,y)为抛物线y＝x2上的动点，由点到直线的距离公式得点P(x,y)到直线x-y-2=0的距离为

$d=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$，

将y＝x²代入上式得

$d=\frac{|x^2-x+2|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}\le\frac{7\sqrt{2}}{8}$，

抛物线y＝x²上的动点到直线x-y-2=0的距离的最小值为$\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

[解3]设直线x-y+m=0是直线x-y-2=0平移到与抛物线y=x^2相切的初始位置，

由$\begin{cases}x-y+m=0\\y=x^2\end{cases}$

消去y得$x^2-x-m=0$，

∵直线与抛物线相切，

∴方程$x^2-x-m=0$有两个相等实根，

∴⊿=1+4m=0，m=－$\frac{1}{4}$，

由$\frac{\left|-\frac{1}{4}-(-2)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$可知

抛物线y＝x²上的动点到直线x-y-2=0的距离的最小值为$\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

变式：(1)抛物线y＝－x²上的点到直线4x＋3y－8＝0距离的最小值是(　)

A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{7}{5}$

C.$\frac{8}{5}$　　D.3

变式：(2)抛物线$y^2=2x$上求一点P，使P到直线x-y+3=0的距离最短，并求出距离的最小值.

[参考答案]

A：(2)P$(\frac{1}{2},1)$，距离的最小值为$\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

3 结语

直线和圆锥曲线的位置关系问题始终是高中数学的重要组成部分，也是历年高考所青睐的知识点，而且形式多样，常考常新。它能形象地体现数形结合思想在解析几何中的应用，有利于培养学生的形象思维和逻辑思维，提高基本运算能力和对数学实质的认识。

[参考文献]

[1]江海民.点到直线的距离公式探究[J].中学课程辅导(教学研究),2016,10(021):99.

[2]韩旺鼎.变用点到直线的距离公式[J].中学生数学,2014,(10):7-8.

[3]吴俊英.点到直线的距离教学设计[J].小作家选刊,2015,(027):5-6.

作者简介：

苏增祥(1972--),男,汉族,河北省隆尧县人,本科,中学一级,长期从事高中数学教学工作。