浅谈 Cramer 法则的情景教学

胡光明　刘禹彤

DOI:10.12238/er.v5i3.4545

[摘　要] Cramer 法则(由线性方程组的系数确定方程组解的表达式)是线性代数中一个关于求解线性方程组的定理,它适用于变量和方程数目相等的线性方程组.本文利用情景教学的方式加深学生对Cramer法则的理解,主要方法为通过三维向量的混合积的运用,得到三阶线性方程组的一个几何方法,并运用这方法推广为我们熟知的Cramer 法则。

[关键词] 线性方程组；混合积；Cramer法则
中图分类号：G421　文献标识码：A

Talk on the Situational Teaching of Cramer’s Rule

Guangming Hu　Yutong Liu

[Abstract] Cramer’s Rule (The expression of solution of linear equations is determined by the coefficients of equations) is a theorem for solving a system of linear equations. It works for systems of linear equations with equal numbers of variables and equations. This paper uses the mode of situational teaching to deepen students' understanding of Cramer's Rule. The main method is to obtain a geometric method of third-order linear equations through the use of the mixed product of three-dimensional vectors, and use this method to popularize to the well-known Cramer's Rule.

[Key words] Linear equation; mixed product; Cramer’s Rule

1 前景提要

初高中生已经学过运用Gauss 消元法来求解三阶线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1}$$

我们知道方程组解的情况有如下三种：无解、惟一解、无穷多解.从几何上来看,方程组对应于三维空间里三个平面,那么方程组的无解的情况对应于这三个平面没有公共点；惟一解对应于这三个平面有一个公共点；无穷多解对应于这三个平面有无穷多个公共点(例如,三平面交于一条直线或者其中两个平面重合)。

由于方程组中方程的个数和未知量的个数相同,假设方程组中的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

不为0,那么我们可以利用三维向量的混合积来解决。自然会想对于此类特殊的高阶线性方程组能否利用类似的方法来处理,由此我们引入著名的Cramer法则。

根据往年学生的学习情况来看高等代数中Cramer法则的证明[1],对于刚进入大学的学术来讲理解起来有些困难,且即便能理解Cramer法则,但是能够熟练运用Cramer法则来解题的并不多,这说明大部分学生在学习Cramer法则的过程中印象不深刻,知识不扎实.在这种情况下,我们可以从学生在初高中熟悉的初等数学的知识混合积方法来证明Cramer 法则,让学生从几何上对此定理有个直观的理解,方便学生记忆。

2 创设问题情景

在学习本节课程之前,提出一个类似于的方程组,提示学生可以用中学代数中解三元线性方程组的Gauss消元法来进行解答。具体例子为：

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 & ① \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 & ② \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 & ③ \end{cases} \tag{2}$$

这里我们给出这样一个高中生就可以解答的简单问题来进行引入,一方面是提高学生对数学的兴趣,另一方面可以提高学生对学习本节课程的自信.特别注意的是这里我们给出的例子的系数行列式一定是不等于零的。下面我们给出这道题的初等解题思路:将方程②×(-1)加到方程 ③上去,得到$-6x_2+6x_3=0$。因此 $x_2=x_3$ ④ ,接下来将方程④代入到到方程 ① 中,我们可以得到$2x_1-x_2-x_2=4$,因此 $x_1=2+x_2$ ⑤。接着将方程 ① ×3 得到方程 $6x_1-3x_2-3x_3=12$ ⑥,将方程②×2得到方程

第 5 卷◆第 3 期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$6x_1+8x_2-4x_3=22$⑦。⑥－⑦得 $-11x_2+x_3=10$⑧，将④代入⑧得 $-11x_2+x_2=-10$，进而 $x_2=x_3=1$，$x_1=3$.

根据课堂反应来看，对于有一定初高中数学基础的学生都能用Gauss消元法将这个方程组解出来，但是我们可以看出来计算过程相对比较复杂，也很容易出错，很多同学给出的答案并不对且解题时间较长。在这里我们就提出我们本节课的主要问题：是否有其他的简单一些的方法也可以解出此类线性方程组？

3 尝试解决问题

提出问题之后给出同学们足够的时间去思考如何解决问题，老师可以鼓励支持和引导学生思考，在适当的情况下给出一些提示，但不可直接给出答案。当然学生可能还会有其他的解决方案．下面我们尝试利用解析几何方法来处理．我们在解析几何中学习过三维向量空间的混合积[2]，这里我们尝试利用这一想法处理这样的方程组，具体如下：

在方程组(1)中，我们设向量 $\overrightarrow{a_1}=(a_{11},a_{12},a_{13})$，$\overrightarrow{a_2}=(a_{21},a_{22},a_{23})$，$\overrightarrow{a_3}=(a_{31},a_{32},a_{33})$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，且混合积 $(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2})\cdot\overrightarrow{a_3}\neq 0$，将方程组(1)做混合积：

$$\begin{cases}(\overrightarrow{a_1}x_1+\overrightarrow{a_2}x_2+\overrightarrow{a_3}x_3)\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}=\vec{b}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}\\(\overrightarrow{a_1}x_1+\overrightarrow{a_2}x_2+\overrightarrow{a_3}x_3)\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=\vec{b}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}\\(\overrightarrow{a_1}x_1+\overrightarrow{a_2}x_2+\overrightarrow{a_3}x_3)\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=\vec{b}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}\end{cases},$$

根据外积的定义及性质我们可以得到

$\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$，$\overrightarrow{a_2}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$，$\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，$\overrightarrow{a_3}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}$

$\overrightarrow{a_3}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$，$\overrightarrow{a_2}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$．因此我们可以得到关于方程组(1)的解：

$$x_1=\frac{\vec{b}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}}{\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}},\ x_2=\frac{\vec{b}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}}{\overrightarrow{a_2}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}},\ x_3=\frac{\vec{b}\times\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_3}}{\overrightarrow{a_3}\times\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}.$$

接下来我们用行列式的形式代替以上向量的混合积形式如下：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}},\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{23}&b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}}.\qquad(3)$$

我们不难发现这里求解的三元线性方程组其实是由三个方程组成，如果方程的个数和未知量的个数不相等，这种方法我们就无法使用。因此我们就可以使用向量混合积的方法来求解方程组(2)，其解为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}4&-1&-1\\11&4&-2\\11&-2&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}}=1,\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&11&-2\\3&11&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}}=1,\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}}=3.$$

这样我们只需要求四个行列式就可以求出三解线性方程组的解。

4 方法的推广

进一步，对学生提出问题：思考对于三个未知量三个方程的方程组可以使用此特殊方法，那对于有n个方程n个未知量的线性方程组是否同样适用？

下面我们先给出这节课需要的一些基本概念：

定义1．内积（数量积）

设n维实向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，称实数 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n$ 为向量 α 和 β 的内积.

定义2．外积（向量积）

设n维实向量 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in})$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的外积为

$$\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_{n-1}=\begin{vmatrix}e_1&e_2&\cdots&e_n\\\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{n-1,1}&\alpha_{n-1,2}&\cdots&\alpha_{n-1,n}\end{vmatrix},$$

其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 分别是沿 R^n 各个轴正方向的单位向量，即 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，其中非零那一项为第 i 位，$i=1,2,\cdots,n$.

下面我们给出本文我们要用到的一个混合积的形式：

定义3．混合积

设n维实向量 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in})$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的混合积为

$$(\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_{n-1})\cdot\alpha_n=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&\alpha_{nn}\end{vmatrix}.$$

下面我们讨论如下方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(4)$$

记 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$，

$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{jn}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，即 D_j，$j=1,\cdots,n$ 是用方程组(4)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，来替换系数行列式D中的第j列的元素而得到的n阶行列式．令

$a_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T, i=1,\cdots,n, b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则我们可以将方程组(4)写为$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ (5),该式两端与 $a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$做内积可以得到

$a_2\cdot(a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)x_1=b\cdot(a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)$,因此

$$x_1=\frac{b\cdot(a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)}{a_2\cdot(a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

类似的,我们可以用$a_1\times\cdots\times a_{i-1}\times a_{i+1}\cdots\times a_n$与等式(5)做内积可以得到 $x_i=D_i/D, i=1,2,\cdots,n.$

以上的证明方法是我们用向量的混合积形式进行证明,但是证明方法并不单一,在上课过程中我们需要倾听不同的声音,以下我们再给出一种证明思路。因 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i, i=1,2,\cdots,n$，从而由行列式的性质(1)如果行列式中有两列元素对应相等,则此行列式为零；(2)如果行列式中某列的各元素都是两项之和,则这个行列式等于两个行列式之和。我们可以将行列式 D_1 转化为下式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=x_1\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+x_2\begin{vmatrix}a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+x_n\begin{vmatrix}a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=x_1\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=x_1D.$$

又由于 $D\neq 0$，则上式可以转化为 $x_1=D_1/D$ ，运用同样的方法,我们依次可以得到

$$x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

5 总结

本文只研究方程组只有唯一解的情况,对应于我们课本上Cramer法则.最后,通过这样一个例子的研究给我们一个启发,代数问题可以用几何直观方法来理解,在我们线性代数里面还有n阶方程对应超平面,n阶行列式对应一个唯一有向体积,矩阵对应线性变换,二次型对应二次曲面等。这些内容我们也可以通过几何方式给出一个漂亮的解释,让学生从几何上对这些抽象问题有个直观的理解,对代数与几何关系有深入的认识。如何从问题情境开始,在解决问题的过程中将所要学习的知识一步一步“发明”出来,让知识的引入如“随风潜入夜”,知识的应用如“润物细无声”,任重道远[3,4]。

[参考文献]

[1]王萼芳,石生明.北京大学数学系前代数小组编,修订,高等代数(第五版)[M].高等教育出版社,2019.

[2]尤承业.解析几何[M].北京大学出版社,2004.

[3]陈建华,李立斌,凌智,等.基于问题解决的线性代数课程教学设计研究[J],高等理科教育,2011(4):117-119+152.

[4]李尚志.线性代数[M],北京:高等教育出版社,2011.