

# 基于 GeoGebra 环境下的立体几何教学研究

薛伟宽 田芳\*

宁夏师范大学

DOI:10.12238/er.v7i10.5448

**摘要:** GeoGebra 是一款免费且开源的动态数学软件, 具有操作简便、动态演示和实用性强等特点, 适用于立体几何教学。文章根据 GeoGebra 的功能和特点, 总结其在立体几何教学设计中的原则, 以直线与平面垂直的判定定理的教学为例, 将 GeoGebra 应用于立体几何教学中, 旨在加强学生直观想象、数学抽象和数学建模等数学核心素养。

**关键词:** GeoGebra; 立体几何; 教学研究

**中图分类号:** G420 **文献标识码:** A

## Research On Solid Geometry Teaching Based On GeoGebra Environment

Weikuan Xue, Fang Tian\*

Ningxia Normal University

**Abstract:** GeoGebra is a free and open source dynamic Mathematics software, which is easy to operate, dynamic demonstration and practical, and is suitable for solid geometry teaching. Based on the functions and characteristics of GeoGebra, this paper summarizes the principles of GeoGebra in the teaching design of solid geometry. Taking the teaching of the theorem of vertical line and vertical plane as an example, GeoGebra is applied to solid geometry teaching, aiming at strengthening students' core Mathematical qualities such as intuitive imagination, Mathematical abstraction and Mathematical modeling.

**Keywords:** GeoGebra; Solid geometry; Teaching research

### 前言

GeoGebra 是由美国佛罗里达州亚特兰大大学数学教授 Markus Hohenwater 发明的一款数学软件, 经过不断的发展和完善, 拥有着优秀的功能和特点。GeoGebra 凭借直观的操作界面, 使得初学者也能快速上手, 其可以动态演示几何图形, 支持操作者对图形进行旋转、平移、切割等多种操作, 并能以动画的形式演示图形的变换过程, 直观的展示数学概念和原理。GeoGebra 是一款免费的软件, 用户可以使用其全部功能, 也可以根据自己的需要进行调整和扩展, 以满足不同的使用需求, 其提供了桌面端、移动端和网页版等多个版本, 集成了几何、代数、统计等多个数学领域的功能, 用户可以在不同的平台和设备上学习和探索, 这种多领域融合的特点为跨学科教学和研究提供了极大的便利<sup>[1]</sup>。

立体几何是高中数学学科的一个重要分支, 主要研究三维空间中的点、线、面以及由它们所构成的几何体的性质、关系和应用。立体几何在高中数学中占有重要的地位, 是高考数学的重要考点之一, 要求学生掌握基本概念、熟悉几何公式、理解空间关系、掌握证明方法等, 学生经过义务教育阶段的学习, 建立了基本的空间观念, 但空间思维普遍停留在二维平面, 而 GeoGebra 的 3D 绘图功能具有直观、动态等诸多优点, 能具象化、生动化的展示三维立体几何图形, 文

章基于 GeoGebra 在立体几何教学设计中的原则, 将软件应用于具体的课堂教学中, 期望帮助学生打破空间思维的局限性, 教师能够更有效的进行教学。

### 一、基于 GeoGebra 的立体几何教学设计原则

#### (一) 直观性原则

直观性原则是指在立体几何教学中要学生通过观察实物模型或教师语言的形象描述, 引导学生形成对所学事物的清晰表象, 丰富学生的感性认识, 从而正确理解知识和发展认识能力。

在传统的教学中, 立体几何的抽象性常常导致学生难以形成直观的空间感知, 而 GeoGebra 拥有强大的可视化功能, 能够直接将立体几何图形以三维的形式展现出来, 有助于学生从多个角度观察和理解立体图形的结构、形状和位置关系, 从而建立对立体几何的直观感知。借助 GeoGebra 展示实物图片和数学模型, 使抽象的几何概念以直观的视觉呈现, 并结合教师形象化的语言描述, 使学生通过对图像和文字的直观感知, 清晰地理解各种空间几何的概念和规律, 从而促进他们对三维空间直观理解。例如, 通过观察一个球体在不同角度下的旋转, 让学生清晰地认识球体的立体特性和空间位置关系; 在求解圆锥的体积时, 借助 GeoGebra 实时显示圆锥的高度、底面半径等参数, 帮助学生直观地理解圆锥体积

的计算公式。

### （二）互动性原则

互动性原则是指在教学中教师要把学生作为学习的主体，通过和学生相互交流和探讨，引导他们主动学习、积极思考，进而缩短师生间的距离，避免课堂枯燥乏味和缺乏活力。

对于一些复杂的几何图形，通过板书呈现往往需要花费大量的时间，也难以生动地展示其变化过程，而 GeoGebra 允许教师和学生共同在计算机设备上实时操作几何图形，教师可以第一时间接收学生的反馈，并及时交流和指导学生对于数学问题的理解和看法，通过动态演示也更容易吸引学生的注意力，这种互动的模式可以让教师时刻从学生的反馈中了解他们的学习情况，并做出相应的教学调整。例如，在“圆柱体的侧面展开”的教学中，教师可以指导学生利用 GeoGebra 制作圆柱体模型，让学生拖动圆柱体的侧面，将其展开为一个矩形，在这个过程中，学生可以清晰地看到圆柱体侧面展开后形成的矩形的长和宽与圆柱体的高和底面周长之间的关系，使学生准确的掌握圆柱体侧面积的计算方法。

### （三）探究性原则

探究性原则是指在教学过程中，让学生主动探索、发现、验证和解决立体几何问题来获取知识、技能和思维方式，一般由教师提出问题，学生主动探索并进行实验和验证，最终得出相应结论，可以培养学生的批判性思维。

GeoGebra 拥有丰富的图形库和计算工具，可以绘制出各种立体几何图形，并进行坐标变换、向量运算等高级计算，这些资源为学生提供了丰富的探究素材，软件支持拖拽、旋转、缩放等多种交互式操作，以及模拟实验、动画演示等功能，这些功能为学生提供了多种操作方式，学生可以通过软件来探索立体几何图形的性质、关系以及变化规律，从不同的角度和层面获取立体几何的知识<sup>[2]</sup>。例如，教师提出“两个球体在空间中如何相交？”，然后指导学生使用 GeoGebra 构建两个球体的模型，拖动其中一个球体，观察它与另一个球体的相交情况，通过动态模拟，总结出两个球体在空间中的相交条件和规律，还可以将这种方法应用于其他几何体之间的空间位置关系中。

## 二、GeoGebra 环境下直线与平面垂直的判定定理的课堂教学设计

### （一）合理创设情境 激活知识模块

师生活动：请学生将教材（人教 A 版《普通高中教科书·数学》必修第二册）打开立于桌面，将书脊视为一条直线，桌面看作一个平面，观察书脊与桌面的位置关系。教师展示旗杆和桥墩的图片，让学生找出图片中的垂直关系，并列举出身边类似的例子。

问题 1：怎么用数学语言描述直线与平面垂直这种位置

关系呢？

师生活动：借助 GeoGebra 演示旗杆在地面上影子的变化情况，学生思考教材 149 页的“观察问题”，分组讨论，尝试用数学语言归纳直线与平面垂直的定义，教师对不完善的地方进行补充，阐述直线与平面垂直的定义并用符号语言进行板书书写。

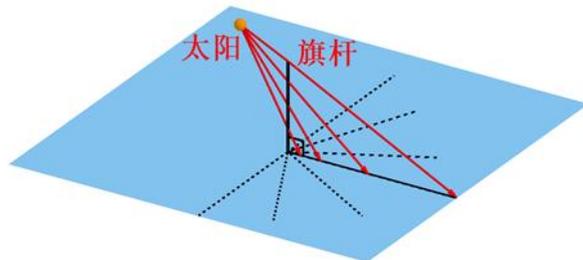


图 1 旗杆影子变化动态演示

设计意图：利用教材创设问题情景，通过图片展示和实例列举，增加学生对直线与平面垂直的感性认识，引出本节课对直线与平面垂直的学习。

借助 GeoGebra 制作旗杆与其影子的模型，动态演示旗杆与其影子的变化情况，使抽象的数学概念具象化，学生通过观察思考，抽象出“直线与平面内任意一条直线垂直”，从实际背景中抽象出几何概念，培养学生的数学抽象能力。

### （二）明确学习任务 进行目标分解

问题 2：可以用直线与平面垂直的定义来证明直线与平面垂直吗？

师生活动：学生思考，发现无法证明一条直线与平面内任意一条直线都垂直，教师提出需要寻找一种切实可行的方法，引导学生对证明直线与平面垂直需要达到的先决条件进行分解。



图 2 直线与平面垂直的判定定理目标分解

设计意图：引导学生寻找证明直线与平面垂直所需的先决条件，将证明直线与平面垂直转化为证明直线与两条相交直线垂直，为学生探究提供正确的方向。

### （三）提取目标信息 探究解决方案

师生活动：请学生在三角形纸片的三个顶点上标上 A、B、C，过纸片的顶点 A 翻折纸片，折痕记作 AD，将折叠后的纸片竖起放在桌面上，强调纸片底边 BD 与 CD 要与桌面贴合，学生思考教材 150 页的“探究问题”，播放纸片翻折

的动画，指导学生利用软件的角度测量工具观察折痕与底边之间的角度。

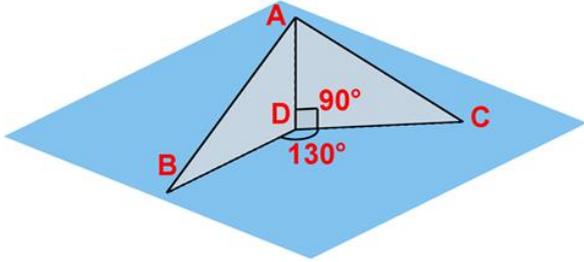


图3 折纸实验动态演示

鼓励学生小组合作、交流探讨，分析“不垂直”的原因，从而发现垂直的条件。学生通过动手操作、直观感知，容易发现当折痕是底边上的高时，折痕与桌面垂直，即使沿纸片的折痕张开或者合拢，折痕仍然与桌面垂直<sup>[3]</sup>。

设计意图：将折痕与桌面垂直的条件转化为直线与平面垂直的条件，学生易于理解。

借助 GeoGebra 制作折纸实验，动态演示纸片的折叠过程，吸引学生注意力，让学生亲自操作软件的测量工具观察折痕与底边之间的具体角度，最终发现折痕与底边垂直的条件，增加学生的课堂参与感。引导学生将“与平面垂直”转化为“与平面内两条相交直线垂直”，让直线与平面垂直的判定具有可操作性。

(四) 归纳概括定理 储蓄陈述知识

问题3：请概括出直线与平面垂直的判定定理？

师生活动：学生交流、讨论，教师与学生共同总结出：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与这个平面垂直，教师书写符号表示，并借助 GeoGebra 直观展示。

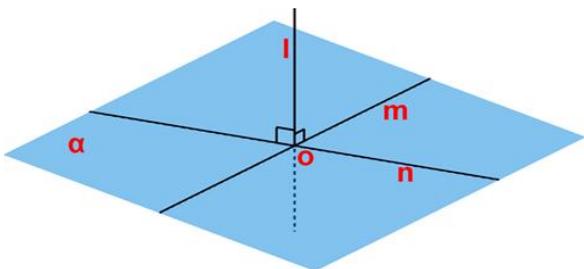


图4 直线垂直于平面

符号表示： $m \in \alpha, n \in \alpha, m \cap n = O, l \perp m, l \perp n \Rightarrow l \perp \alpha$

设计意图：引导学生对折纸实验得到的结论进行合情推理，在思辨中总结出直线与平面垂直的判定条件，培养学生的归纳概括和逻辑推理能力，渗透数形结合的思想方法。

借助 GeoGebra 直观展示直线与平面垂直的几何模型，书写直线与平面垂直判定定理的符号表示，从文字语言、符号语言、图形语言三个角度加深学生对直线与平面垂直判定定理的印象。

(五) 产生链式规则 运用陈述知识

例题1：已知两条直线 a 和 b，一个平面  $\gamma$ ，且  $a \parallel b, a \perp \gamma$ ，求证： $b \perp \gamma$

师生活动：学生独立思考，尝试书写证明过程，教师借助 GeoGebra 讲解证明过程。

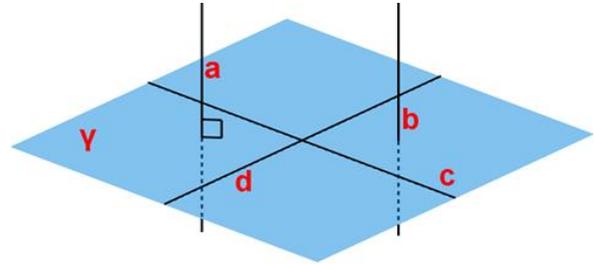


图5 例题1图示

证明：在平面  $\gamma$  内取两条相交直线 c, d

$$\because a \perp \gamma$$

$$\therefore a \perp c, a \perp d$$

$$\because a \parallel b$$

$$\therefore b \perp c, b \perp d$$

又  $c \in \gamma, d \in \gamma, c$  与  $d$  是两条相交直线

$$\therefore b \perp \gamma$$

设计意图：选取直线与平面垂直的典型例题进行讲解，使学生学会使用直线与平面垂直判定定理的一般方法。

借助 GeoGebra 展示例题的几何模型，将文字问题转化为更加直观、形象的图形语言，使问题以可视化的形式呈现，学生容易发现证明题设的突破口。用数学语言规范书写证明过程，为学生树立榜样。

(六) 运用变式练习 巩固程序知识

练习1：电线杆被两条牵引绳固定，牵引绳一端固定在电线杆顶部，另一端分别固定在地面上，经过测量得到电线杆高8m，牵引绳长10m，两条牵引绳在地面的固定点到电线杆底部的距离都是6m，那么电线杆与地面垂直吗？

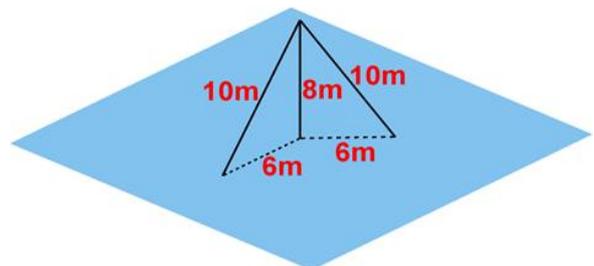


图6 练习1图示

师生活动：学生独立思考，教师引导学生利用 GeoGebra 制作习题的几何模型，学生依据数学模型，参照例题1尝试用数学语言书写证明过程。

设计意图：设置与现实生活密切相关的变式练习，使学生学会在实际情境中运用直线与平面垂直的判定定理。

引导学生借助 GeoGebra 构建习题的几何模型，将文字语言转化为图形语言，培养学生的空间想象能力和数学建模意识。学生容易从已有图式中自动生成解决问题的程序性知识，联想到用直线与平面垂直的判定定理解决问题。

#### （七）课堂总结提升 产生式自动化

课堂回顾：本节课学习了哪些判断直线与平面垂直的方法；证明直线与平面垂直时应注意哪些问题；本节课你还有哪些问题？

课堂总结：直线与平面垂直的定义和直线与平面垂直的判定定理的文字描述和符号表示。

课后作业：教材第152页练习第2题，第163页习题8.6第5题和第10题；以思维导图的形式整理本节课的知识点。

课后探索：请学生借助 GeoGebra 制作直线与平面垂直的模型，在3D绘图区自由绘制直线，运用软件的测量工具，观察这些直线与已知直线的位置关系。

设计意图：以问题的形式对本节课进行总结，巩固学生的程序性知识。针对直线与平面垂直的判定定理布置不同类型的变式练习，使学生学会在不同环境中应用直线与平面垂直的判定定理，通过课后练习提高学生从已有图式中找到解决问题的程序性知识的速度。借助 GeoGebra 让学生探索数学知识，为学习直线与平面垂直的性质定理做准备。

#### （八）课后反思

本节课基于 GeoGebra 的立体几何教学设计原则，在 GeoGebra 的应用方面，直观演示旗杆影子的变化情况、纸片的翻折实验和数学问题的图示，以便学生直观感知几何模型；指导学生操作软件测量角度，引导学生构建实际问题的几何模型，增加了课堂上师生之间的交流；鼓励学生借助软件探

索直线与平面垂直的性质，培养了学生的自主探究能力<sup>[4]</sup>。

### 三、总结

文章依据 GeoGebra 软件的功能和特点，总结其在立体几何教学设计中的直观性原则、互动性原则和探究性原则。基于 GeoGebra 的立体几何教学设计原则，对直线与平面垂直的判定定理进行课堂教学设计，发现将 GeoGebra 与立体几何教学相结合，可以促进学生对三维空间的直观感知，增加学生课堂的参与度，培养学生教学建模的能力和思想，有效的打破思维的局限性，有利于提高学生探究问题和解决问题的能力。

#### [参考文献]

[1]冯宝林.基于GeoGebra培养高中生直观想象素养的实践研究[D].宁夏大学,2023.

[2]何瑞林.基于GeoGebra的高中解析几何教学研究[D].江西师范大学,2022.

[3]陈丁怡.基于GeoGebra培养高中生数学核心素养的立体几何教学实践研究[D].西南大学,2023.

[4]聂丽君.GeoGebra支持的数学空间观念教学活动设计研究[D].南昌大学,2023.

#### 作者简介：

薛伟宽（2001-），男，汉族，陕西商洛人，宁夏师范大学，硕士，从事数学教学研究。

田芳（通讯作者）（1981-），女，回族，宁夏海原人，宁夏师范大学，硕士，从事群论研究。

#### 基金项目：

宁夏2024年高等学校科学研究项目（NYG2024184）