文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

基于问题导向的高中数学教学设计——以“平面向量基本定理”为例

徐胜男
聊城大学数学科学学院
DOI:10.12238/er.v7i11.5553

摘　要：本着“学生为本，因材施教”的设计理念，对“平面向量基本定理”的教材进行分析，结合学生的知识能力和数学思想方法基础，进行问题导向式、启发式的教学设计，逐步培养学生的问题意识，引导学生完成对知识的探究，充分发挥学生学习的主观能动性，旨在培养学生的抽象概括、推理论证的数学能力。
关键词：平面向量基本定理；教学设计；高中数学
中图分类号：G63 **文献标识码：**A

Problem-oriented Teaching Design for High School Mathematics Curriculum——Taking the Basic Theorem of Plane Vectors as an Example

Shengnan Xu
School of Mathematical Sciences, Liaocheng University

Abstract: Based on the design concept of "student-centered and individualized teaching", this paper analyzes the textbook of "Basic Theorem of Plane Vectors", combines students' knowledge and mathematical thinking methods, and carries out problem oriented and heuristic teaching design, gradually cultivating students' problem awareness, guiding students to explore knowledge, fully exerting students' subjective initiative in learning, aiming to cultivate students' mathematical abilities of abstract generalization, reasoning and argumentation.
Keywords: Fundamental theorem of plane vectors; Instructional design; High School; Mathematics

引言

党的二十大报告强调：“要把‘坚持问题导向’作为习近平新时代中国特色社会主义思想世界观和方法论的重要内容之一，继续推进实践基础上的理论创新[1]。”通过设置问题链的形式，搭建以教学目标为基础的知识框架，使教学内容以知识体系的形式为学生所吸收。同时，通过发现、提出、解决问题的过程，以学生为主体，充分经历知识的发现、探究和生成，落实数学学科核心素养的培养。因此，以“平面向量基本定理”一节为例，探索基于问题导向的高中数学课程教学设计，开展有效的教学活动，促进学生知识与能力的发展。

一、设计理念

（一）问题导向，发展素养

通过设置问题串的形式，在恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生提问的示范，培养学生的问题意识，进行问题导向式、启发式教学，循序渐进，逐步引导学生完成对知识的探究。

结合物理中“力的分解”模型，探究平面向量基本定理的内容，强化学生的抽象认识以及理解能力，从而促使学生的数学抽象素养得以发展。通过经历平面向量基本定理的推理以及证明的过程，在探究中发现问题，提出命题，表述论证过程，发展学生的逻辑推理素养。

（二）学生为本，因材施教

“学生是学习的主体”，在问题探究中设置有层次的、深度思考的问题和操作活动，让学生在思维与操作过程中自主的发现、归纳知识，做学习的主人。教师课前对学生可能做出的反应进行预设，充分考虑到不同程度的学生，并以此安排应对措施，保证每位学生理解知识。

（三）思想升华，提炼方法

平面向量基本定理蕴含着丰富的数学思想，比如类比、转化、化归、数形结合等，在本课的教学中，从类比向量共线定理提出新的问题，到对定理内容的实践探究、分类讨论、推理演绎的过程中，并结合信息技术直观感知新知，每一步都注意渗透数学思想方法，并在课堂小结中引导学生将数学思想提炼出来，促进学生数学思维能力的提升。

第 7 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 / （中图刊号）：380GL020

二、教材分析

“平面向量基本定理”是人教 A 版高中数学实验教科书必修二第六章第三节“平面向量基本定理及坐标表示”中的教学内容。本节的知识结构框图如图 1 所示。

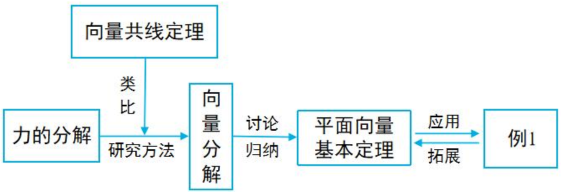


图 1 本节知识结构图

（一）确定研究内容和方法

类比向量共线定理，确定研究内容。以物理学中力的分解得到启示，通过构造平行四边形，对一个向量进行分解，得到进行活动探究思路，确定研究方法：化归与类比、数形结合。

（二）活动探究 抽象定理

依据向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$， $\boldsymbol{e}_2$ 是否共线的关系，分三种情况，将向量 a 关于向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分解，归纳出 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，并证明其唯一性和存在性，抽象出平面向量基本定理以及基底的概念。

（三）例题应用 知识拓展

例 1 考查了基底的概念以及定理的应用，加深学生对平面向量基本定理的理解，得出结果后对其进行深入探究，结合图形直观和结果的代数特征，得出证明三点共线的一种方法，对知识进一步拓展。

三、学情分析

知识能力基础：课前学生学习了平面向量的基础知识，掌握了向量共线定理的内容，能够利用已知向量唯一线性表示出与其共线的任一向量，解决简单的几何问题。

思想方法基础：高一学生熟悉数形结合、化归与转化的数学思想方法，具有一定逻辑推理、数学抽象的素养，但是对于较复杂，抽象程度较高的情境，会出现思路不清、难以完成抽象的问题。

学情预设：学生在课前，对于向量之间关系的认识还停留在“一维”层面，对于本节课定理揭示的“二维”层面向量间的关系，在认知维度的跃迁，部分学生会有一定程度的接受困难，需要教师加以引导启发。

四、课程标准要求[2]

（一）理解平面向量基本定理及其意义。

（二）会运用平面向量基本定理解决简单平面几何问题。

五、教学目标

（一）理解平面向量基本定理的内容及其意义。

（二）经历平面向量基本定理从提出问题到探究最后得出结论的过程，感受类比、转化、从特殊到一般的数学思想方法，积累从具体到抽象的活动经验，提高发现问题、解决问题的能力。

（三）通过对平面向量的直观感知，上升到数理解析的高度，抽象出平面内向量的一般规律，发展数学抽象、直观想象素养。

六、教学重、难点

重点：理解并掌握平面向量基本定理及其意义。

难点：平面向量基本定理的发现和探究过程。

突破策略：在教学过程中，引导学生积极参与探索，通过回顾向量共线定理，体会在“一维”空间，对共线向量简便的表示，从而提出“二维”空间中，对任一向量怎样表示，结合实际情境，从学生熟悉的背景——力的分解出发，带领学生发现、归纳定理。经历从特殊到一般，从具体到抽象的过程[3]，提炼其中的数学思想方法。

七、教学方法

探究式教学法，启发式谈话法

八、教学过程

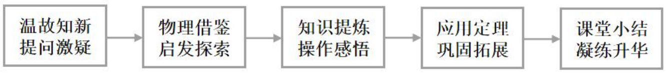


图 2 教学流程图

（一）温故知新，提问激疑

复习向量共线定理，即：在一条直线上给定一个非零向量，则与其共线的任一向量都能由给定的向量唯一表示。

问题 1：平面内任一向量 a 能否由同一平面内的一个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 表示？

预设 学生：不可以，如果两个向量不共线，向量 a 能由向量 $\boldsymbol{e}_1$ 线性表示，由向量共线定理，这两个向量应该共线，矛盾。

追问：平面内任一向量 a 能否由同一平面内的两个向量表示？

预设 学生提出：给定的两个向量“不能共线”。

问题 2：平面内任一向量 a 能否由同一平面内的两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$， $\boldsymbol{e}_2$ 表示？

设计意图：向量共线定理适用于同一直线的向量，类比向量共线定理，启发学生拓展研究，平面内任一向量怎么表示？继而引出课题。顺应学生的思维，来发现、提出问题，更容易将他们带入到课堂之中，激发学生的求知欲。

（二）物理借鉴，启发探索

引导学生联系物理学知识，在物理中通过构造平行四边

教育研究
第 7 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文｜刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

形对力进行分解，由此得到启示，通过构造平行四边形，对向量进行分解，让它表示成两个向量和的形式。

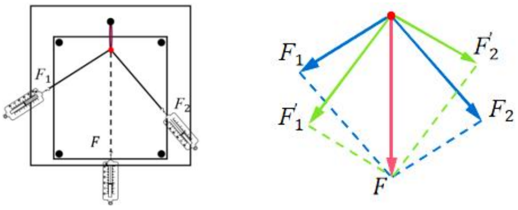


图 3 力的分解示意图

设计意图：数学中的向量与物理学中的矢量联系密切，因此对向量的学习离不开物理学科的矢量，以物理中的力作为例子，得到启发，对之后的探究活动找到了研究方法。

（三）活动探究，发现新知

问题 3：将向量 a 按 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分解，有什么发现？

1.向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线时

师生活动：利用信息技术将向量 a 关于向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分解的过程分部演示。

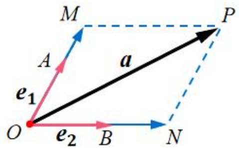


图 4

由平行四边形法则可知，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，根据向量共线定理，从而得到向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的关系：

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2。$$

证明λ的唯一性：

在作图过程中，引导学生发现：根据平行公理，过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行，则交点 M，N 唯一确定，因此向量$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$ 唯一确定。由向量共线定理，向量 $\overrightarrow{OM}$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1$ 共线，存在唯一实数 λ_1，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，同理可得 $\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，因此证得 λ_1，λ_2 是唯一确定的。

2.向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 中的一个向量共线时

通过多媒体动画，结合向量共线定理，向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$ 共线时，$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2$。

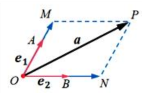
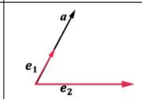
同理，向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_2$ 共线时，λ_1 为 0。

3.向量 a 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 均不共线时

此时向量 a 为零向量，因此 λ_1，λ_2 均为 0。

因此平面上两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 确实能表示出这个平面内的任一向量。

表 1

a 与 e_1，e_2 位置关系	a 与 e_1，e_2 不共线	a 与 e_1，e_2 中一个共线	a 与 e_1，e_2 均共线（a 为零向量）
a 与 e_1，e_2 位置图示			
a 与 e_1，e_2 关系表达式	$a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$	$a=\lambda_1 e_1+0\cdot e_2$ 或 $a=0\cdot e_1+\lambda_2 e_2$	$a=0\cdot e_1+0\cdot e_2$

设计意图：通过分类讨论，在三种情境中将向量 a 关于向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分解，得出结论，为最终定理的得出打下坚实的直观认识基础。

（四）知识提炼，定理浮现

平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一个平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 a，有且只有一对实数 λ_1，λ_2 使

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2。$$

定理解读：解决几何问题时，将平面无穷多向量转化为同一平面内两个不共线向量的线性表示，实现从无限到有限、从几何问题到代数问题的转化，并引出基底的含义。

设计意图：结合探究过程，从源头把握定理内容，提升学生数学抽象素养。对定理的实际意义进行解读，感受平面向量定理的“基本”所在，使其对定理的理解由感性认识升华到理性认识。

（五）实践操作，感受定理

做一做 将给定的向量 a 分别关于这两组基底$\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$，$\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\}$进行分解。

教学组织：学生借助学具，规范作图，随后教师动画展示作图流程。

设计意图：给定平面内同一个向量，不同的两个基底，

第 7 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

让学生动手操作，亲身感受向量分解的唯一性，以及不同基底下对同一向量分解的不同结果，为基底不唯一的性质提供感性认知。

问题 4：在同一平面内，基底唯一吗？

学生思考：基底满足“不共线”的条件，平面上两个不共线的向量有无数组，因此基底不唯一。

追问：平面内有多组基底可选，借鉴物理中对力、速度等矢量分解的经验，选择哪组基底更符合数学思维习惯，使向量分解更优化？

设计意图：对基底的概念与性质进一步深化思考，为下一节课平面向量的坐标表示进行铺垫。

（六）应用定理，知识拓展

例 1　如图，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t\in R$），用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$。

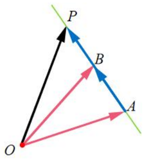


图 5 例 1 图示

分析：将{$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$}看成一个基底，根据向量的三角形法则和向量的减法运算，结合已知条件，将 $\overrightarrow{OP}$ 用其所在平面内的基底{$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$}进行表示。

问题 5：通过已知条件 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t\in \mathrm{R}$），还能得出哪些结论？

预设 1 学生根据向量共线定理，得出 P，A，B 三点在同一直线上。

预设 2 学生发现 t 在这个题目中是一个变量，随着 t 值的改变，P 点的位置会发生变化。

通过 GGB 数学软件给出 P 点位置随 t 值变化的动画，推理出不管 P 点位置如何改变，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OP}$ 之间始终满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 的关系。

问题 6：观察 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，你有什么发现？

式子中 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的系数之和等于 1，得出结论：如果向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 P，A，B 三点共线的充要条件是 $\lambda+\mu=1$。

设计意图：巩固对定理以及基底含义的理解，然后对例题进一步拓展，得到新知，培养学生发现新知的能力，拓宽学生的知识储备。

（七）课堂小结，提炼升华

学生回顾、总结本节内容，教师补充引导，梳理课堂知识逻辑线（如图 7），提升至数学核心素养与思想方法层面。

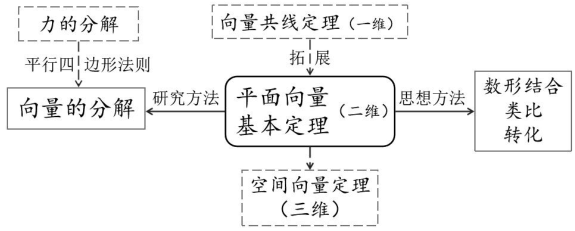


图 6 课堂知识逻辑线

核心素养：在探究活动中，通过直观感受，抽象得出定理内容，促进学生逻辑推理、直观想象和数学抽象素养的培养。

思想方法：由向量分解的示意图，得出向量之间的线性关系式，体现“数形结合”的思想；由向量共线定理拓展出平面向量基本定理，体现“类比”的思想；平面向量基本定理将同一平面内无穷多个向量转化成平面上两个不共线向量的线性表示，从无限到有限，体现“化归与转化”的思想。

问题 8：在三维空间中，怎么表示任一向量？

设计意图：按照逻辑思维线进行课堂小结，提炼数学知识和素养方法，帮助学生构建知识体系。向量共线定理和平面向量基本定理分别在“一维”和“二维”空间对向量的简便表示，故问题 8 为空间向量定理的学习进行铺垫。

（八）分层作业，稳固提升

必做题：练习 1，2；

选做题：思考并证明例 1 的结论。

设计意图：设计“分层式”课后作业，满足不同层次学生的需要。

九、结语

问题导向式的教学可以充分调动学生学习的主观能动性，更好践行“学生主体”的教学理念，化被动为主动，激发学生学习的积极性。因此在教学实践中，采用问题导向、启发式教学，提升学生发现问题的能力；立足教材，经历定理的探索证明，发展学生抽象概括、推理论证的关键能力，培养逻辑推理、数学抽象素养，促进学生全面发展。

[参考文献]

[1]坚持问题导向,不断推进马克思主义中国化时代化:学习贯彻党的二十大精神[J].智慧中国,2023(1):4-6.

[2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版 2020 年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:25-26.

[3]王克亮.新授课“四问驱动”教学范式的构建与实践——课堂教学实施“问题解决”的操作策略的探索[J].数学通报,2021,60(07):52.

作者简介：

徐胜男（2001.10—），女，汉族，山东聊城人，硕士研究生在读，聊城大学数学科学学院，研究方向：课程与教学论。